

Derivacion e integracion

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener el valor proporcionado por Gauss-Legendre de la integral de la función $f(x) = e^{-3x}$ en el intervalo $[0,3]$ utilizando 8 puntos.

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

0.333

Solution:

La fórmula de integración de Gauss-Legendre usando n puntos es:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + R_n$$

donde x_k es la k -ésima raíz del polinomio de Legendre de orden n , $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k , que se puede calcular por las fórmulas:

$$w_k = \frac{2}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2} = \frac{2(1-x_k^2)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(x_k)]^2} = \frac{2}{n P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)}$$

ya que $(1-x^2) P'_n(x) = n [x P_n(x) - P_{n-1}(x)]$ [*]. El error que se comete es del orden de:

$$R_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1)$$

Para un intervalo arbitrario $[a,b]$ en lugar de $[-1,1]$, debemos hacer el cambio de variable (dif. divididas):

$$\begin{aligned} x = -1 \rightarrow z = a \\ \frac{(b-a)}{(1+1)} = z = a + \frac{b-a}{2} (x+1) = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2} \Rightarrow dz = \frac{b-a}{2} dx \\ x = 1 \rightarrow z = b \end{aligned}$$

Por tanto, la fórmula para un intervalo arbitrario $[a,b]$ usando n puntos es:

$$\int_a^b f(z) dz = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)}{2} x + \frac{b+a}{2}\right) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{(b-a)}{2} x_k + \frac{b+a}{2}\right) + R_n$$

donde x_k es la k -ésima raíz de $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k , siendo el error que se comete del orden de

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad (a < \xi < b)$$

El polinomio de Legendre de orden 8 es

$$P_8(x) = 35/128 + \frac{6435}{128} x^8 - \frac{3003}{32} x^6 + \frac{3465}{64} x^4 - \frac{315}{32} x^2$$

que tiene por raíces y pesos asociados a las raíces:

GAUSS-LEGENDRE, 8 puntos		
k	x_k	w_k
1	-0.9602898564975362	0.1012285362903763
2	-0.7966664774136267	0.2223810344533745
3	-0.5255324099163290	0.3137066458778873
4	-0.1834346424956498	0.3626837833783620
5	0.1834346424956498	0.3626837833783620
6	0.5255324099163290	0.3137066458778873
7	0.7966664774136267	0.2223810344533745
8	0.9602898564975362	0.1012285362903763

Para obtener estos valores se pueden consultar las tablas preferidas (p.e. del Abramowitz-Stegun) o también usar Newton-Raphson para obtener las raíces x_k y alguna de las fórmulas anteriores para calcular los pesos, tal como se hace en la subrutina/procedimiento `gauleg` del libro *Numerical Recipes*. La aproximación inicial que utiliza la subrutina para calcular x_k es $\cos(\pi(k-0.25)/(n+0.5))$. Para calcular $P'_n(x)$ se usa la fórmula [*].

Por tanto, la estimación de la integral con este número de puntos es:

$$\int_0^3 e^{-3x} dx \approx \frac{3-0}{2} \sum_{k=1}^8 w_k f\left(\frac{3-0}{2} x_k + \frac{3+0}{2}\right) = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^8 w_k e^{-9/2 x_k - 9/2} = 0.3332921953$$

siendo $f(x) = e^{-3x}$. ($I = 0.3332921953474941$)

Como el valor máximo de la derivada $2n$ -ésima es

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(2n)}(x)| = \max_{x \in [0,3]} |f^{(16)}(x)| = \max_{x \in [0,3]} |43046721 e^{-3x}| = 43046721$$

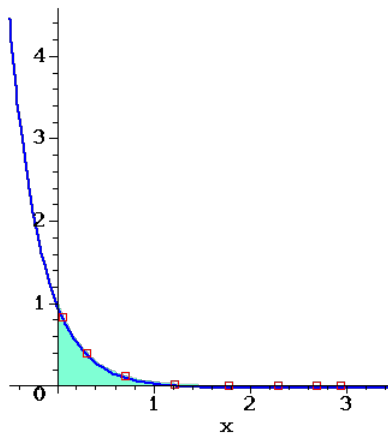
ya que su valor máximo se presenta en el punto $x = 0$, una cota superior del error cometido con 8 puntos es entonces:

$$|R_n| = \left| \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \right| \leq \frac{94143178827}{997730070937600000} = 0.00000009435736335$$

Y el error real cometido con 8 puntos al número de decimales considerado es:

$$|E_n| = |0.3332921967 - 0.3332921953| = 0.0000000014$$

Sigue una gráfica de la función, y el área determinada por la curva en el intervalo pedido. Aparecen con un cuadrado los diferentes puntos sobre la curva de f . Estos valores son los que se multiplican por sus pesos correspondientes, para realizar el cálculo de la integral.



(cc) Jesus Garcia Quesada 2011

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).