

Derivacion e integracion

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener el valor proporcionado por Gauss-Legendre de la integral de la función $f(x) = e^{x-1}$ en el intervalo $[1,4]$ utilizando 11 puntos.
 You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

19.1

Solution:

La fórmula de integración de Gauss-Legendre usando n puntos es:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + R_n$$

donde x_k es la k-ésima raíz del polinomio de Legendre de orden n, $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k , que se puede calcular por las fórmulas:

$$w_k = \frac{2}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2} = \frac{2(1-x_k^2)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(x_k)]^2} = \frac{2}{n P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)}$$

ya que $(1-x^2) P'_n(x) = n [x P_n(x) - P_{n-1}(x)]$ [*]. El error que se comete es del orden de:

$$R_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1)$$

Para un intervalo arbitrario $[a,b]$ en lugar de $[-1,1]$, debemos hacer el cambio de variable (dif. divididas):

$$x = -1 \rightarrow z = a$$

$$\frac{(b-a)}{(1+1)} = z = a + \frac{b-a}{2} (x+1) = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2} \Rightarrow dz = \frac{b-a}{2} dx$$

$$x = 1 \rightarrow z = b$$

Por tanto, la fórmula para un intervalo arbitrario $[a,b]$ usando n puntos es:

$$\int_a^b f(z) dz = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)}{2} x + \frac{b+a}{2}\right) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{(b-a)}{2} x_k + \frac{b+a}{2}\right) + R_n$$

donde x_k es la k-ésima raíz de $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k , siendo el error que se comete del orden de

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad (a < \xi < b)$$

El polinomio de Legendre de orden 11 es

$$P_{11}(x) = \frac{88179}{256} x^{11} - \frac{230945}{256} x^9 + \frac{109395}{128} x^7 - \frac{45045}{128} x^5 + \frac{15015}{256} x^3 - \frac{693}{256} x$$

que tiene por raíces y pesos asociados a las raíces:

GAUSS-LEGENDRE, 11 puntos		
k	x_k	w_k
1	-0.9782286581460570	0.0556685671161737
2	-0.8870625997680953	0.1255803694649046
3	-0.7301520055740493	0.1862902109277343
4	-0.5190961292068118	0.2331937645919905
5	-0.2695431559523450	0.2628045445102467
6	0.0000000000000000	0.2729250867779006
7	0.2695431559523450	0.2628045445102467
8	0.5190961292068118	0.2331937645919905
9	0.7301520055740493	0.1862902109277343
10	0.8870625997680953	0.1255803694649046
11	0.9782286581460570	0.0556685671161737

Para obtener estos valores se pueden consultar las tablas preferidas (p.e. del Abramowitz-Stegun) o también usar Newton-Raphson para obtener las raíces x_k y alguna de las fórmulas anteriores para calcular los pesos, tal como se hace en la

subrutina/procedimiento *gauleg* del libro *Numerical Recipes*. La aproximación inicial que utiliza la subrutina para calcular x_k es $\cos((\pi(k-0.25))/(n+0.5))$. Para calcular $P'_n(x)$ se usa la fórmula [*].

Por tanto, la estimación de la integral con este número de puntos es:

$$\int_1^4 e^{x-1} dx \approx \frac{4-1}{2} \sum_{k=1}^{11} w_k f\left(\frac{4-1}{2} x_k + \frac{4+1}{2}\right) = 3/2 \sum_{k=1}^{11} w_k e^{3/2 x_k + 3/2} = 19.8553692$$

siendo $f(x) = e^{x-1}$. ($I = 19.0855369231876677$)

Como el valor máximo de la derivada $2n$ -ésima es

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(2n)}(x)| = \max_{x \in [1,4]} |f^{(22)}(x)| = \max_{x \in [1,4]} |e^{x-1}| = e^3$$

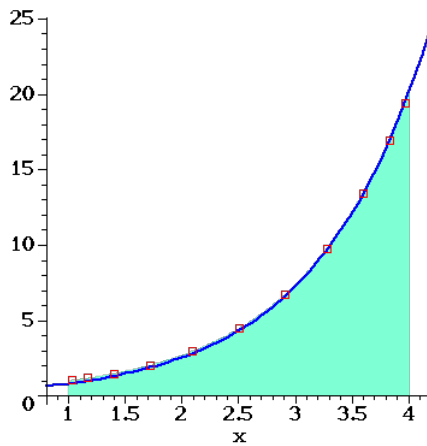
ya que su valor máximo se presenta en el punto $x = 4$, una cota superior del error cometido con 11 puntos es entonces:

$$|R_n| = \left| \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \right| \leq \frac{531441}{72622457194799048299642880000} e^3 = 1.469831542 \times 10^{-22}$$

Y el error real cometido con 11 puntos al número de decimales considerado es:

$$|E_n| = |19.8553692 - (19.8553692)| = 0.0$$

Sigue una gráfica de la función, y el área determinada por la curva en el intervalo pedido. Aparecen con un cuadrado los diferentes puntos sobre la curva de f . Estos valores son los que se multiplican por sus pesos correspondientes, para realizar el cálculo de la integral.



(cc) Jesus Garcia Quesada 2011

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).