

Derivacion e integracion

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener el valor proporcionado por Gauss-Legendre de la integral de la función $f(x) = \sin(x) \cos(x)$ en el intervalo $[1,2]$ utilizando 9 puntos.

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

0.0594

Solution:

La fórmula de integración de Gauss-Legendre usando n puntos es:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) + R_n$$

donde x_k es la k -ésima raíz del polinomio de Legendre de orden n , $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k , que se puede calcular por las fórmulas:

$$w_k = \frac{2}{(1-x_k^2) [P'_n(x_k)]^2} = \frac{2(1-x_k^2)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(x_k)]^2} = \frac{2}{n P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)}$$

ya que $(1-x^2) P'_n(x) = n [x P_n(x) - P_{n-1}(x)]$ [*]. El error que se comete es del orden de:

$$R_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1)$$

Para un intervalo arbitrario $[a,b]$ en lugar de $[-1,1]$, debemos hacer el cambio de variable (dif. divididas):

$$x = -1 \rightarrow z = a$$

$$\frac{(b-a)}{(1+1)} = z = a + \frac{b-a}{2} (x+1) = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2} \Rightarrow dz = \frac{b-a}{2} dx$$

$$x = 1 \rightarrow z = b$$

Por tanto, la fórmula para un intervalo arbitrario $[a,b]$ usando n puntos es:

$$\int_a^b f(z) dz = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)}{2} x + \frac{b+a}{2}\right) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n w_k f\left(\frac{(b-a)}{2} x_k + \frac{b+a}{2}\right) + R_n$$

donde x_k es la k -ésima raíz de $P_n(x)$, y w_k el peso correspondiente a x_k , siendo el error que se comete del orden de

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad (a < \xi < b)$$

El polinomio de Legendre de orden 9 es

$$P_9(x) = \frac{12155}{128} x^9 - \frac{6435}{32} x^7 + \frac{9009}{64} x^5 - \frac{1155}{32} x^3 + \frac{315}{128} x$$

que tiene por raíces y pesos asociados a las raíces:

GAUSS-LEGENDRE, 9 puntos		
k	x_k	w_k
1	-0.9681602395076261	0.0812743883615744
2	-0.8360311073266358	0.1806481606948574
3	-0.6133714327005904	0.2606106964029355
4	-0.3242534234038089	0.3123470770400028
5	0.0000000000000000	0.3302393550012598
6	0.3242534234038089	0.3123470770400028
7	0.6133714327005904	0.2606106964029355
8	0.8360311073266358	0.1806481606948574
9	0.9681602395076261	0.0812743883615744

Para obtener estos valores se pueden consultar las tablas preferidas (p.e. del Abramowitz-Stegun) o también usar Newton-Raphson para obtener las raíces x_k y alguna de las fórmulas anteriores para calcular los pesos, tal como se hace en la subrutina/procedimiento `gauleg` del libro *Numerical Recipes*. La aproximación inicial que utiliza la subrutina para calcular x_k es $\cos(\pi(k-0.25)/(n+0.5))$. Para calcular $P'_n(x)$ se usa la fórmula [*].

Por tanto, la estimación de la integral con este número de puntos es:

$$\int_1^2 \sin(x) \cos(x) dx \approx \frac{2-1}{2} \sum_{k=1}^9 w_k f\left(\frac{2-1}{2} x_k + \frac{2+1}{2}\right) = 1/2 \sum_{k=1}^9 w_k \sin(1/2 x_k + 3/2) \cos(1/2 x_k + 3/2) = 0.05937419608$$

siendo $f(x) = \sin(x) \cos(x)$. ($I = 0.0593741960791174$)

Como el valor máximo de la derivada 2n-ésima es

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(2n)}(x)| = \max_{x \in [1,2]} |f^{(18)}(x)| = \max_{x \in [1,2]} |-262144 \sin(x) \cos(x)| = 262144 \sin(1) \cos(1)$$

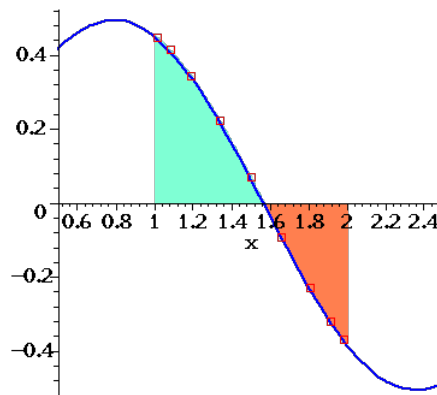
ya que su valor máximo se presenta en el punto $x = 1$, una cota superior del error cometido con 9 puntos es entonces:

$$|R_n| = \left| \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{1096944382075804762500} \sin(1) \cos(1) = 4.144683366 \times 10^{-22}$$

Y el error real cometido con 9 puntos al número de decimales considerado es:

$$|E_n| = |0.05937419608 - (0.05937419608)| = 0.0$$

Sigue una gráfica de la función, y el área determinada por la curva en el intervalo pedido. Aparecen con un cuadrado los diferentes puntos sobre la curva de f . Estos valores son los que se multiplican por sus pesos correspondientes, para realizar el cálculo de la integral.



(cc) Jesus Garcia Quesada 2011

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).