Derivación e integración

Question 1 [Top](#) [1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener la derivada segunda de la función f(x) = ln(5 x) en el punto 1.5 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula central y comenzando con h=0.9. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -0.444 & -0.444 & -0.444 \end{bmatrix}$$

Solution:
Para estimar la derivada segunda usando tres puntos conocemos las fórmulas:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f''(x) = \frac{f(x+2\,h) - 2\,f(x+h) + f(x)}{h^2} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i\, h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i}\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna T_0^i (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^{\beta}\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1}, \quad \text{para k=1,2, ...(columna)}, \quad \text{i=1,2, ...(fila)}$$

siendo β = 2,1 respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2$ $\forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^i = \frac{4^k\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^i = \frac{2^k\; T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central (β = 2) y progresiva (β = 1), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.90000000	**-0.55097173**							
0.45000000	-0.46573175	**-0.43731842**						
0.22500000	-0.44952073	-0.44411706	**-0.44457030**					
0.11250000	-0.44569915	-0.44442529	-0.44444584	**-0.44444386**				
5.625000e-02	-0.44475724	-0.44444327	-0.44444446	-0.44444444	**-0.44444445**			
2.812500e-02	-0.44452259	-0.44444437	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	**-0.44444444**		
1.406250e-02	-0.44446398	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	**-0.44444444**	
7.031250e-03	-0.44444933	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	**-0.44444444**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^4 - T_3^3| = |-.44444444513459998941 - (-.44444386440290253571)| = .58073169745370e\text{-}6 < .1e\text{-}3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial h_0 = h y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor

inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [1/2,1/4] para generar otro vector [1,1/2,1/8,1/16,1/64,1/128,1/512,1/1024] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.90000000	**-0.55097173**							
0.45000000	-0.46573175	**-0.43731842**						
0.11250000	-0.44569915	-0.44436365	**-0.44447547**					
5.625000e-02	-0.44475724	-0.44444327	-0.44444453	**-0.44444441**				
1.406250e-02	-0.44446398	-0.44444443	-0.44444444	-0.44444444	**-0.44444444**			
7.031250e-03	-0.44444933	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	**-0.44444444**		
1.757812e-03	-0.44444475	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	**-0.44444444**	
8.789062e-04	-0.44444452	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	-0.44444444	**-0.44444444**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 3, ya que $|T_3^3-T_2^2|=|-.44444440883886889855 - (-.44447547414914616336)| = .3106531027726481e-4 < .1e-3$

Mark summary:

Question	**Value**	**Your mark**
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.