Derivación e integración

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la integral por Romberg de la función $f(x) = -2\,x^{-1}$ en el intervalo [1,7] dando el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -3.89 & -3.89 & -3.89 \end{bmatrix}$$

Solution:

Usando la fórmula trapezoidal con 2^k subintervalos

$$T_0^k = h\left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \ldots + f_{2^{k-1}} + \frac{1}{2} f_{2^k}\right), \quad h = \frac{b-a}{2^k}, \quad f_i = f(x_i) \quad (2^k + 1 \text{ puntos}, k=0,1,2,\ldots)$$

que también podemos poner como

$$T_0^k = \frac{b-a}{2^{k+1}}\left(f_0 + 2\,f_1 + \ldots + 2\,f_{2^{k-1}} + f_{2^k} \right)$$

Esta fórmula tiene como error de truncamiento una expresión del tipo

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\,h^{2i},$$

por lo que es posible aplicar la extrapolación de Richardson a un conjunto de estimaciones realizadas con esta regla, y esto constituye el método de integración de Romberg. Las diferentes estimaciones las haremos subdividiendo el intervalo de integración por 2, por lo que la estimación T_0^k que aparece anteriormente es la obtenida con 2^k aplicaciones de la regla del trapecio. Se ha visto que para calcular T_0^k podemos utilizar el valor T_0^{k-1} previamente calculado, de forma que solo necesitaríamos evaluar la función f en los 2^{k-1} puntos nuevos. Para obtener el resto de columnas aplicaremos la siguiente fórmula recurrente, tal como nos indica la fórmula general de la extrapolación de Richardson:

$$T_m^k = \frac{4^m \; T_{m-1}^{k+1} - T_{m-1}^k}{4^m - 1} = T_{m-1}^{k+1} + \frac{T_{m-1}^{k+1} - T_{m-1}^k}{4^m - 1}, \quad \text{para } k=0,1,\ldots \quad m=1,2,\ldots$$

La tabla resultante es:

INTEGRACIÓN DE ROMBERG								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
6.00000000	**-6.85714286**							
3.00000000	-4.92857143	**-4.28571429**						
1.50000000	-4.20974026	-3.97012987	**-3.94909091**					
0.75000000	-3.97934092	-3.90254114	-3.89803523	**-3.89722482**				
0.37500000	-3.91446946	-3.89284563	-3.89219927	-3.89210663	**-3.89208656**			
0.18750000	-3.89753984	-3.89189663	-3.89183336	-3.89182755	-3.89182646	**-3.89182621**		
0.09375000	-3.89325397	-3.89182534	-3.89182059	-3.89182039	-3.89182036	-3.89182035	**-3.89182035**	
0.04687500	-3.89217896	-3.89182062	-3.89182030	-3.89182030	-3.89182030	-3.89182030	-3.89182030	**-3.89182030**

Siguiendo el mismo criterio que se ha usado para la extrapolación de Richardson en diferenciación numérica, la convergencia se produjo al calcular la linea 6, ya que $|T_6^6 - T_5^5|$=|-3.8918203512359926027 - (-3.8918262056129936184)| = .58543770010157e-5 < .1e-3

Romberg puede resultar costoso desde el punto de vista computacional si se quiere obtener una precisión alta, ya que el número de puntos a considerar se duplica entre dos estimaciones sucesivas por la regla trapezoidal. Sin embargo, tiene convergencia lineal, por lo que la mejora obtenida en la precisión de un dígito decimal a lo sumo no justifica el aumento del número de puntos en que es necesario evaluar la función a integrar. Como en cada nueva estimación se divide el paso h anterior por 2, los pasos h_n considerados en Romberg son:

$$h_0 = b-a, \quad h_1 = h_0/2, \quad h_2 = h_1/2 = h_0/4, \quad h_3 = h_2/2 = h_0/8, \quad h_4 = h_0/16, \quad h_5 = h_0/32 \text{ etc.}$$

Otra posible elección de los valores de h la ha propuesto R. Bulirsch (*Numerische Mathematik* **6**, 6-16, 1964):

$$h_0 = b-a, \quad h_1 = h_0/2, \quad h_2 = h_0/3, \quad h_3 = h_0/4, \quad h_4 = h_0/6, \quad h_5 = h_0/8, \quad h_6 = h_0/12, \quad h_7 = h_0/16, \quad \text{etc.}$$

que tiene la ventaja de que el cálculo requerido para obtener las estimaciones por la trapezoidal aumenta de forma más lenta. Los denominadores d_n de las $h_n = [(b-a)/(d_n)]$ (donde $d_n = 1,2,3,4,6,8,12,16,24, \ldots$) son los enteros de la forma 2^k y $3(2^k)$, de forma que todas las evaluaciones del integrando se usan en el cálculo de las sumas trapezoidales posteriores. Una implementación en Algol 60 se puede encontrar en Bulirsch-Stoer (*Numer. Math.* **9**, 271-278, 1967). J. Oliver (*Numer. Math.* **17**, 17-32, 1971) recomienda esta elección como óptima.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.