

# Derivación e integración

## Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener la integral por Romberg de la función  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  en el intervalo  $[0,2]$  dando el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.  
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.11 & 1.11 & 1.11 \end{bmatrix}$$

### Solution:

Usando la fórmula trapezoidal con  $2^k$  subintervalos

$$T_0^k = h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{2^{k-1}} + \frac{1}{2} f_{2^k} \right), \quad h = \frac{b-a}{2^k}, \quad f_i = f(x_i) \quad (2^k + 1 \text{ puntos}, k=0,1,2,\dots)$$

que también podemos poner como

$$T_0^k = \frac{b-a}{2^{k+1}} (f_0 + 2 f_1 + \dots + 2 f_{2^{k-1}} + f_{2^k})$$

Esta fórmula tiene como error de truncamiento una expresión del tipo

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i},$$

por lo que es posible aplicar la extrapolación de Richardson a un conjunto de estimaciones realizadas con esta regla, y esto constituye el método de integración de Romberg. Las diferentes estimaciones las haremos subdividiendo el intervalo de integración por 2, por lo que la estimación  $T_0^k$  que aparece anteriormente es la obtenida con  $2^k$  aplicaciones de la regla del trapecio. Se ha visto que para calcular  $T_0^k$  podemos utilizar el valor  $T_0^{k-1}$  previamente calculado, de forma que solo necesitaríamos evaluar la función  $f$  en los  $2^{k-1}$  puntos nuevos. Para obtener el resto de columnas aplicaremos la siguiente fórmula recurrente, tal como nos indica la fórmula general de la extrapolación de Richardson:

$$T_m^k = \frac{4^m T_{m-1}^{k+1} - T_{m-1}^k}{4^m - 1} = T_{m-1}^{k+1} + \frac{T_{m-1}^{k+1} - T_{m-1}^k}{4^m - 1}, \quad \text{para } k=0,1, \dots \quad m=1,2, \dots$$

La tabla resultante es:

INTEGRACIÓN DE ROMBERG								
h	$T_0^i$	$T_1^i$	$T_2^i$	$T_3^i$	$T_4^i$	$T_5^i$	$T_6^i$	$T_7^i$
2.00000000	<b>1.20000000</b>							
1.00000000	1.10000000	<b>1.06666667</b>						
0.50000000	1.10384615	1.10512821	<b>1.10769231</b>					
0.25000000	1.10631663	1.10714012	1.10727425	<b>1.10726762</b>				
0.12500000	1.10694046	1.10714841	1.10714896	1.10714697	<b>1.10714650</b>			
0.06250000	1.10709664	1.10714870	1.10714872	1.10714871	1.10714872	<b>1.10714872</b>		
0.03125000	1.10713570	1.10714872	1.10714872	1.10714872	1.10714872	1.10714872	<b>1.10714872</b>	
0.01562500	1.10714546	1.10714872	1.10714872	1.10714872	1.10714872	1.10714872	1.10714872	<b>1.10714872</b>

Siguiendo el mismo criterio que se ha usado para la extrapolación de Richardson en diferenciación numérica, la convergencia se produjo al calcular la línea 5, ya que  $|T_5^5 - T_4^4| = |1.1071487229488680707 - (1.1071464963522050746)| = .22265966629961e-5 < .1e-3$

Romberg puede resultar costoso desde el punto de vista computacional si se quiere obtener una precisión alta, ya que el número de puntos a considerar se duplica entre dos estimaciones sucesivas por la regla trapezoidal. Sin embargo, tiene convergencia lineal, por lo que la mejora obtenida en la precisión de un dígito decimal a lo sumo no justifica el aumento del número de puntos en que es necesario evaluar la función a integrar. Como en cada nueva estimación se divide el paso  $h$  anterior por 2, los pasos  $h_n$  considerados en Romberg son:

$$h_0 = b-a, \quad h_1 = h_0/2, \quad h_2 = h_1/2 = h_0/4, \quad h_3 = h_2/2 = h_0/8, \quad h_4 = h_0/16, \quad h_5 = h_0/32 \text{ etc.}$$

Otra posible elección de los valores de  $h$  la ha propuesto R. Bulirsch (*Numerische Mathematik* **6**, 6-16, 1964):

$$h_0 = b-a, \quad h_1 = h_0/2, \quad h_2 = h_0/3, \quad h_3 = h_0/4, \quad h_4 = h_0/6, \quad h_5 = h_0/8, \quad h_6 = h_0/12, \quad h_7 = h_0/16, \quad \text{etc.}$$

que tiene la ventaja de que el cálculo requerido para obtener las estimaciones por la trapezoidal aumenta de forma más lenta.

Los denominadores  $d_n$  de las  $h_n = [(b-a)/(d_n)]$  (donde  $d_n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, \dots$ ) son los enteros de la forma  $2^k$  y  $3(2^k)$ , de forma que todas las evaluaciones del integrando se usan en el cálculo de las sumas trapezoidales posteriores. Una implementación en Algol 60 se puede encontrar en Bulirsch-Stoer (*Numer. Math.* **9**, 271-278, 1967). J. Oliver (*Numer. Math.* **17**, 17-32, 1971) recomienda esta elección como óptima.



(cc) Jesús García Quesada 2011

---

**Mark summary:**

Question	Value	Your mark
<a href="#">1</a>	3.00	-
Total	3.00	0.00

---

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

---

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).

Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).