Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Lagrange con la siguiente tabla de valores, e interpolar en el punto x = −4.

x_k	−5	−7	4
y_k	−2	−2	−2

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-2$$

Solution:

Sabemos que la fórmula de interpolación de Lagrange para los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0,...,n, viene dada por: (ver por ejemplo el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/lagrange.pdf)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0,\ i \neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

Dados los puntos (x_0,y_0) = (-5,-2), (x_1,y_1) = (-7,-2), (x_2,y_2) = (4,-2), tenemos entonces que los polinomios de Lagrange son los siguientes:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = -1/18\ (x+7)(x-4) = -1/18\ x^2-1/6\ x+14/9$$

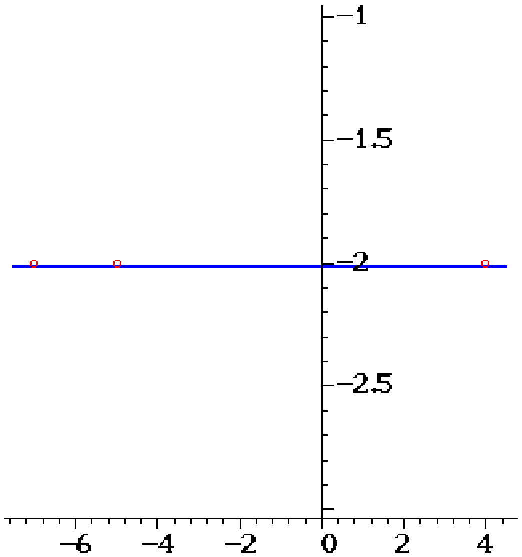
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = 1/22\ (x+5)(x-4) = 1/22\ x^2+1/22\ x-10/11$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 1/99\ (x+5)(x+7) = 1/99\ x^2+4/33\ x+35/99$$

El polinomio solución es por tanto:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2} y_k L_k(x) = -2\ L_0(x)-2\ L_1(x)\ -2\ L_2(x) = -2$$

y la gráfica del polinomio de interpolación y de los puntos (x_i,y_i), i=0,...,2 es la siguiente:



Si en lugar de obtener el polinomio de interpolación se quiere interpolar en un punto, o sea, se quiere calcular el valor del polinomio de interpolación en un punto concreto, basta sustituir la variable "x" de la fórmula por ese valor y realizar las operaciones correspondientes. En nuestro caso, si se quiere interpolar en el punto $x=-4$, usando alguna de las expresiones ya vistas para $L_k(x)$, obtenemos:

$L_0(-4) = 4/3$, $L_1(-4) = -4/11$, $L_2(-4) = 1/33$ y por tanto:

$$p(-4) = \sum_{k=0}^{2} y_k\, L_k(-4) = -2\, L_0(-4) - 2\, L_1(-4)\ - 2\, L_2(-4) = -2$$

Si ya se tuviera el polinomio explícitamente tal como se ha calculado aquí, en potencias de x multiplicadas por sus coeficientes, es preferible utilizar el algoritmo de Ruffini-Horner para evaluar el polinomio en los puntos deseados, ya que entonces el coste es lineal (ver apuntes asignatura). En este caso, para obtener el valor en $x = -4$ del polinomio de interpolación $p(x) = -2$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

−4	−2
	−2

o bien

$$p(-4) = -2 \ = -2$$

obteniendo el mismo resultado que antes, $p(-4) = -2$, con muchas menos operaciones. Sabemos que con Ruffini-Horner a lo sumo son necesarios n productos y n sumas para obtener el valor de un polinomio de grado n. Claro que para llegar a este punto se han debido realizar antes todas las operaciones necesarias para obtener el polinomio en potencias de x.
¿cuántas sumas/restas y productos/divisiones son necesarias para obtener el polinomio final?

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.