Interpolación y Aproximación

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Lagrange con la siguiente tabla de valores, e interpolar en el punto $x = -1$.

$\mathbf{x_k}$	0	−3	2	−4
$\mathbf{y_k}$	0	−84	26	−196

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$x+3\,x^3$$

This can be entered as:

x+3*x^3

Solution:

Sabemos que la fórmula de interpolación de Lagrange para los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0,...,n, viene dada por: (ver por ejemplo el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/lagrange.pdf)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_k(x)$$

Dados los puntos (x_0,y_0) = (0,0), (x_1,y_1) = (-3,-84), (x_2,y_2) = (2,26), (x_3,y_3) = (-4,-196), tenemos entonces que los polinomios de Lagrange son los siguientes:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = -1/24\,(x+3)(x-2)(x+4) = -1/24\,x^3-5/24\,x^2+1/12\,x+1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = 1/15\,x\,(x-2)(x+4) = 1/15\,x^3+2/15\,x^2-8/15\,x$$

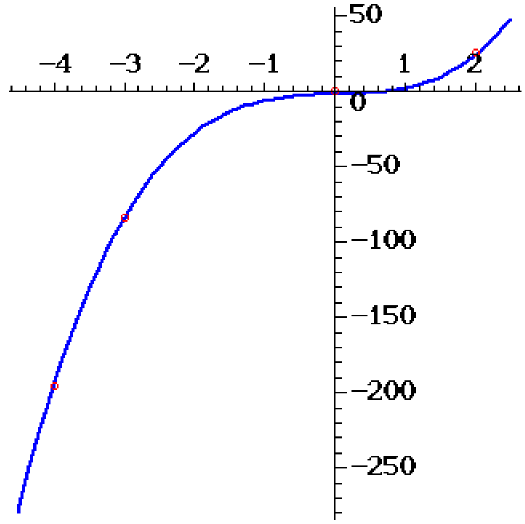
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = 1/60\,x\,(x+3)(x+4) = 1/60\,x^3+7/60\,x^2+1/5\,x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = -1/24\,x\,(x+3)(x-2) = -1/24\,x^3-1/24\,x^2+1/4\,x$$

El polinomio solución es por tanto:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} y_k\, L_k(x) = 0\,L_0(x)-84\,L_1(x)+26\,L_2(x)-196\,L_3(x) = x+3\,x^3$$

y la gráfica del polinomio de interpolación y de los puntos (x_i,y_i), i=0,...,3 es la siguiente:



Si en lugar de obtener el polinomio de interpolación se quiere interpolar en un punto, o sea, se quiere calcular el valor del polinomio de interpolación en un punto concreto, basta sustituir la variable "x" de la fórmula por ese valor y realizar las operaciones correspondientes. En nuestro caso, si se quiere interpolar en el punto $x=-1$, usando alguna de las expresiones ya vistas para $L_k(x)$, obtenemos:

$L_0(-1) = 3/4$, $L_1(-1) = 3/5$, $L_2(-1) = -1/10$, $L_3(-1) = -1/4$ y por tanto:

$$p(-1) = \sum_{k=0}^{3} y_k L_k(-1) = 0\, L_0(-1) - 84\, L_1(-1) + 26\, L_2(-1) - 196\, L_3(-1) = -4$$

Si ya se tuviera el polinomio explícitamente tal como se ha calculado aquí, en potencias de x multiplicadas por sus coeficientes, es preferible utilizar el algoritmo de Ruffini-Horner para evaluar el polinomio en los puntos deseados, ya que entonces el coste es lineal (ver apuntes asignatura). En este caso, para obtener el valor en $x = -1$ del polinomio de interpolación $p(x) = x+3\,x^3$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

−1	3	0	1	0
	3	−3	4	**−4**

o bien

$$p(-1) = ((3 \,.\, (-1) + 0) \,.\, (-1) + 1) \,.\, (-1) + 0 = -4$$

obteniendo el mismo resultado que antes, $p(-1) = -4$, con muchas menos operaciones. Sabemos que con Ruffini-Horner a lo sumo son necesarios n productos y n sumas para obtener el valor de un polinomio de grado n. Claro que para llegar a este punto se han debido realizar antes todas las operaciones necesarias para obtener el polinomio en potencias de x.
¿cuántas sumas/restas y productos/divisiones son necesarias para obtener el polinomio final?

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00