Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Lagrange con la siguiente tabla de valores, e interpolar en el punto x = 1.

x_k	−3	−2	5	−1	0
y_k	45	10	−235	−1	0

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-2\,x^3+3\,x$$

This can be entered as:

-2*x^3+3*x

Solution:

Sabemos que la fórmula de interpolación de Lagrange para los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0,...,n, viene dada por: (ver por ejemplo el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/lagrange.pdf)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_k(x)$$

Dados los puntos (x_0,y_0) = (-3,45), (x_1,y_1) = (-2,10), (x_2,y_2) = (5,-235), (x_3,y_3) = (-1,-1), (x_4,y_4) = (0,0), tenemos entonces que los polinomios de Lagrange son los siguientes:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = 1/48\,(x+2)(x-5)(x+1)\,x = 1/48\,x^4-1/24\,x^3-13/48\,x^2-5/24\,x$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = -1/14\,(x+3)(x-5)(x+1)\,x = -1/14\,x^4+1/14\,x^3+17/14\,x^2+15/14\,x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = 1/1680\,(x+3)(x+2)(x+1)\,x = 1/1680\,x^4+1/280\,x^3+\frac{11}{1680}\,x^2+1/280\,x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = 1/12\,(x+3)(x+2)(x-5)\,x = 1/12\,x^4-19/12\,x^2-5/2\,x$$

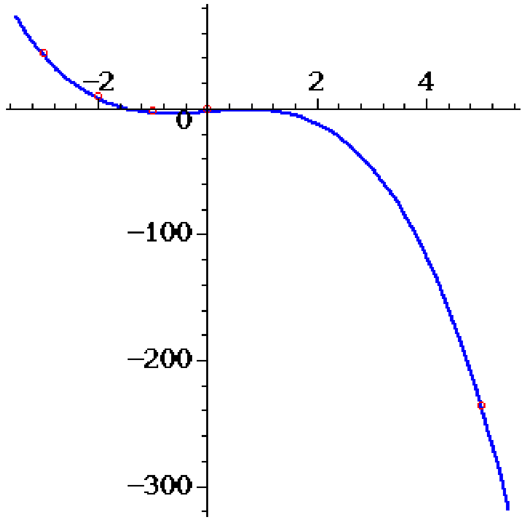
$$L_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = -1/30\,(x+3)(x+2)(x-5)(x+1) = -1/30\,x^4-1/30\,x^3+19/30\,x^2+49/30\,x+1$$

El polinomio solución es por tanto:

$$p(x) = \sum^{4} y_k\, L_k(x) = 45\,L_0(x)+10\,L_1(x)-235\,L_2(x)-1\,L_3(x)+0\,L_4(x) = -2\,x^3+3\,x$$

k=0

y la gráfica del polinomio de interpolación y de los puntos (x_i,y_i), i=0,...,4 es la siguiente:



Si en lugar de obtener el polinomio de interpolación se quiere interpolar en un punto, o sea, se quiere calcular el valor del polinomio de interpolación en un punto concreto, basta sustituir la variable "x" de la fórmula por ese valor y realizar las operaciones correspondientes. En nuestro caso, si se quiere interpolar en el punto x=1, usando alguna de las expresiones ya vistas para $L_k(x)$, obtenemos:

$L_0(1) = -1/2$, $L_1(1) = 16/7$, $L_2(1) = 1/70$, $L_3(1) = -4$, $L_4(1) = 16/5$ y por tanto:

$$p(1) = \sum_{k=0}^{4} y_k L_k(1) = 45\ L_0(1)+10\ L_1(1) -235\ L_2(1) -1\ L_3(1) +0\ L_4(1) = 1$$

Si ya se tuviera el polinomio explícitamente tal como se ha calculado aquí, en potencias de x multiplicadas por sus coeficientes, es preferible utilizar el algoritmo de Ruffini-Horner para evaluar el polinomio en los puntos deseados, ya que entonces el coste es lineal (ver apuntes asignatura). En este caso, para obtener el valor en x = 1 del polinomio de interpolación $p(x) = -2\ x^3+3\ x$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

1	−2	0	3	0
	−2	−2	1	**1**

o bien

$$p(1) = ((-2\ .\ 1 +0)\ .\ 1 +3)\ .\ 1 +0 = 1$$

obteniendo el mismo resultado que antes, p(1) = 1, con muchas menos operaciones. Sabemos que con Ruffini-Horner a lo sumo son necesarios n productos y n sumas para obtener el valor de un polinomio de grado n. Claro que para llegar a este punto se han debido realizar antes todas las operaciones necesarias para obtener el polinomio en potencias de x.
¿cuántas sumas/restas y productos/divisiones son necesarias para obtener el polinomio final?

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-