

Interpolación y Aproximación

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Dada la siguiente tabla de valores, obtener la función racional resultante por el algoritmo de Thiele.

x_k	4	-4	-1	5	6	-7
y_k	-4/11	20	-4	-8/23	-20/61	16/11

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\frac{-4x+4}{1+x^2+4x}$$

This can be entered as:

`(-4*x+4)/(1+x^2+4*x)`

Solution:

Sabemos que si tenemos los 2n+1 puntos (x_i,y_i), i=0,1,... 2n, y queremos calcular la función racional p(x)/q(x) (en la que tanto p(x) como q(x) son de grado n) que interpola en dichos puntos utilizando el algoritmo de Thiele en fracciones continuas, hemos de usar:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{\frac{x-x_0}{\varphi[x_0,x_1]} + \frac{x-x_1}{\varphi[x_0,x_1,x_2]} + \frac{x-x_2}{\varphi[x_0,x_1,x_2,x_3]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]}$$

O también:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{|\varphi[x_0,x_1]|} + \frac{x-x_1}{|\varphi[x_0,x_1,x_2]|} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{|\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]|}$$

en las que aparecen las diferencias inversas $\varphi[x_0,\dots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores en los puntos conocidos. Las diferencias inversas se definen recursivamente como:

$$\varphi[x_i] = f(x_i) = y_i, \quad \varphi[x_i,x_j] = \frac{x_i-x_j}{y_i-y_j}, \quad \varphi[x_i,x_j,x_k] = \frac{x_j-x_k}{\varphi[x_i,x_j]-\varphi[x_i,x_k]}, \quad \varphi[x_i,\dots,x_l,x_m,x_n] = \frac{x_m-x_n}{\varphi[x_i,\dots,x_l,x_m]-\varphi[x_i,\dots,x_l,x_n]}$$

Calculamos entonces la tabla de diferencias inversas, y observamos que la columna 6 tiene sus 2 elementos iguales, por lo que paramos los cálculos en dicha columna

x _k	y _k	ϕ[x ₀ ,x _k]	ϕ[x ₀ ,x ₁ ,x _k]	ϕ[x ₀ ,...,x ₂ ,x _k]	ϕ[x ₀ ,...,x ₃ ,x _k]	ϕ[x ₀ ,...,x ₄ ,x _k]
4	-4/11					
-4	20	-11/28				
-1	-4	11/8	56/33			
5	-8/23	253/4	14/99	-27/7		
6	-20/61	671/12	84/473	-129/28	-4/3	
-7	16/11	-121/20	35/66	36/7	-4/3	

A efectos de notación, se ha expresado la diferencia inversa por $\varphi[x_0,\dots,x_i,x_k]$, en la que $k > i$. La diagonal de la tabla de diferencias inversas, en color rojo, es entonces: [-4/11, -11/28, 56/33, -27/7, -4/3], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, la ecuación es

$$-4/11 + (x-4) \left(-11/28 + (x+4) \left(56/33 + \frac{x+1}{\dots} \right)^{-1} \right)^{-1}$$

$$-3/28 - 3/4 x$$

siendo las sucesivas funciones racionales las siguientes:

$$\Phi^{0,0}(x) = -4/11 \text{ (interpola en el primer punto)}$$

$$\Phi^{1,0}(x) = -4/11 + (x-4)/(-11/28) = 108/11 - 28/11 x \text{ (interpola en los 2 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{1,1}(x) = -4/11 + [(x-4)/(55/28 + 33/56 x)] = 4 [(-6+x)/(10+3 x)] \text{ (interpola en los 3 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,1}(x) = -4/11 + (x-4) (-11/28 + (x+4) ([427/297] - 7/27 x)^{-1})^{-1} = -4 [(27-8 x+x^2)/(53+17 x)] \text{ (interpola en los 4 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,2}(x) = -4/11 + (x-4) (-11/28 + (x+4) (56/33 + [(x+1)/(-3/28 - 3/4 x)])^{-1})^{-1} = -4 [(x-1)/(1+x^2+4 x)] \text{ (interpola en todos los puntos)}$$

La ecuación en fracciones continuas es

$$R(x) = -4/11 + \frac{x-4}{-11/28 + \frac{x+4}{56/33 + \frac{x+1}{-27/7 + [(x-5)/(-4/3)]}}}$$

O también:

$$R(x) = -4/11 + \frac{x-4}{-11/28} + \frac{x+4}{56/33} + \frac{x+1}{-27/7} + \frac{x-5}{-4/3}$$

y la ecuación simplificada

$$R(x) = -4 \frac{x-1}{1+x^2+4 x}$$



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).

Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).