

Interpolación y Aproximación

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Dada la siguiente tabla de valores, obtener la función racional resultante por el algoritmo de Thiele.

x_k	1	3	-6	-3	-1
y_k	-1	-31/47	-16/17	-31/23	7

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\frac{-4-3x^2}{-1+4x^2+4x}$$

This can be entered as:

$(-4-3*x^2)/(-1+4*x^2+4*x)$

Solution:

Sabemos que si tenemos los $2n+1$ puntos (x_i, y_i) , $i=0,1,\dots, 2n$, y queremos calcular la función racional $p(x)/q(x)$ (en la que tanto $p(x)$ como $q(x)$ son de grado n) que interpola en dichos puntos utilizando el algoritmo de Thiele en fracciones continuas, hemos de usar:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{\frac{x-x_0}{\varphi[x_0,x_1]} + \frac{x-x_1}{\varphi[x_0,x_1,x_2]} + \frac{x-x_2}{\varphi[x_0,x_1,x_2,x_3]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]}$$

O también:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{|\varphi[x_0,x_1]} + \frac{x-x_1}{|\varphi[x_0,x_1,x_2]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{|\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]}$$

en las que aparecen las diferencias inversas $\varphi[x_0,\dots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores en los puntos conocidos. Las diferencias inversas se definen recursivamente como:

$$\varphi[x_i] = f(x_i) = y_i, \quad \varphi[x_i,x_j] = \frac{x_i-x_j}{y_i-y_j}, \quad \varphi[x_i,x_j,x_k] = \frac{x_j-x_k}{\varphi[x_i,x_j] - \varphi[x_i,x_k]}, \quad \varphi[x_i,\dots,x_l,x_m,x_n] = \frac{x_m-x_n}{\varphi[x_i,\dots,x_l,x_m] - \varphi[x_i,\dots,x_l,x_n]}$$

Calculamos entonces la tabla de diferencias inversas

x_k	y_k	$\varphi[x_0,x_k]$	$\varphi[x_0,x_1,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_2,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_3,x_k]$
1	-1				
3	-31/47	47/8			
-6	-16/17	-119	8/111		
-3	-31/23	23/2	-16/15	-1665/632	
-1	7	-1/4	32/49	5439/632	79/444

A efectos de notación, se ha expresado la diferencia inversa por $\varphi[x_0,\dots,x_i,x_k]$, en la que $k > i$. La diagonal de la tabla de diferencias inversas, en color rojo, es entonces: [-1, 47/8, 8/111, -1665/632, 79/444], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, la ecuación es

$$-1 + (-1+x) \left(47/8 + (x-3) \left(8/111 + (x+6) \left(\frac{8991}{632} + \frac{444}{79} x \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1}$$

siendo las sucesivas funciones racionales las siguientes:

$$\Phi^{0,0}(x) = -1 \text{ (interpola en el primer punto)}$$

$$\Phi^{1,0}(x) = -1 + (x-1)/(47/8) = -55/47 + 8/47 x \text{ (interpola en los 2 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{1,1}(x) = -1 + [(-1+x)/(-143/4 + 111/8 x)] = -[(-278 + 103 x)/(-286 + 111 x)] \text{ (interpola en los 3 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,1}(x) = -1 + (-1+x) (47/8 + (x-3) (-[408/185] - [632/1665] x)^{-1})^{-1} = [(-3780 + 124 x + 79 x^2)/(3321 + 256 x)] \text{ (interpola en los 4 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,2}(x) = -1 + (-1+x) (47/8 + (x-3) (8/111 + (x+6) ([8991/632] + [444/79] x)^{-1})^{-1})^{-1} = -[(4 + 3 x^2)/(-1 + 4 x^2 + 4 x)] \text{ (interpola en todos los puntos)}$$

La ecuación en fracciones continuas es

$$R(x) = -1 + \frac{\frac{x-1}{47/8 + \frac{8/111 + \frac{-[1665/632] + [(x+3)/([79/444])]}{x+6}}{x-3}}{x-1}}$$

O también:

$$R(x) = -1 + \frac{x-1}{47/8} + \frac{x-3}{8/111} + \frac{x+6}{-\frac{1665}{632} + \frac{x+3}{444}}$$

y la ecuación simplificada

$$R(x) = -\frac{4 + 3 x^2}{-1 + 4 x^2 + 4 x}$$



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).