

Interpolación y Aproximación

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Dada la siguiente tabla de valores, obtener la función racional resultante por el algoritmo de Thiele.

x_k	0	7	5	-5	-6	-7	6	4	-3
y_k	-1/2	-1/884	-1/352	1/148	1/286	1/488	-1/578	-1/194	1/16

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-(2 + 2x^3 + 4x^2)^{-1}$$

This can be entered as:

-1/(2+2*x^3+4*x^2)

Solution:

Sabemos que si tenemos los 2n+1 puntos (x_i,y_i), i=0,1,... 2n, y queremos calcular la función racional p(x)/q(x) (en la que tanto p(x) como q(x) son de grado n) que interpola en dichos puntos utilizando el algoritmo de Thiele en fracciones continuas, hemos de usar:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{\varphi[x_0,x_1]} + \frac{x-x_1}{\varphi[x_0,x_1,x_2]} + \frac{x-x_2}{\varphi[x_0,x_1,x_2,x_3]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]}$$

O también:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{|\varphi[x_0,x_1]|} + \frac{x-x_1}{|\varphi[x_0,x_1,x_2]|} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{|\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]|}$$

en las que aparecen las diferencias inversas $\varphi[x_0,\dots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores en los puntos conocidos. Las diferencias inversas se definen recursivamente como:

$$\varphi[x_i] = f(x_i) = y_i, \quad \varphi[x_i,x_j] = \frac{x_i-x_j}{y_i-y_j}, \quad \varphi[x_i,x_j,x_k] = \frac{x_j-x_k}{\varphi[x_i,x_j]-\varphi[x_i,x_k]}, \quad \varphi[x_i,\dots,x_l,x_m,x_n] = \frac{x_m-x_n}{\varphi[x_i,\dots,x_l,x_m]-\varphi[x_i,\dots,x_l,x_n]}$$

Calculamos entonces la tabla de diferencias inversas, y observamos que la columna 8 tiene sus 3 elementos iguales, por lo que paramos los cálculos en dicha columna

x _k	y _k	$\varphi[x_0,x_k]$	$\varphi[x_0,x_1,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_2,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_3,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_4,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_5,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_6,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_7,x_k]$
0	-1/2								
7	-1/884	884/63							
5	-1/352	352/35	315/626						
-5	1/148	-148/15	945/1882	589066/63					
-6	1/286	-143/12	252/503	314878/63	21/91396				
-7	1/488	-488/35	2205/4406	1379078/315	35/87014	-40588/7			
6	-1/578	289/24	504/1003	-627878/441	-147/143980	-67160/7	-1/292		
4	-1/194	97/12	756/1499	-938374/1071	-119/135216	-63072/7	-1/292		
-3	1/16	-16/3	63/122	-38186/63	-21/104542	-48764/7	-1/292		

A efectos de notación, se ha expresado la diferencia inversa por $\varphi[x_0,\dots,x_i,x_k]$, en la que $k > i$. La diagonal de la tabla de diferencias inversas, en color rojo, es entonces: [-1/2, 884/63, 315/626, 589066/63, 21/91396, -40588/7, -1/292], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, la ecuación es

$$-1/2+x\left(\frac{884}{63}+(x-7)\left(\frac{315}{626}+(x-5)\left(\frac{589066}{63}+(x+5)\left(\frac{21}{91396}+(x+6)(-[54896/7]-292x)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$$

siendo las sucesivas funciones racionales las siguientes:

$$\Phi^{0,0}(x) = -1/2 \text{ (interpola en el primer punto)}$$

$$\Phi^{1,0}(x) = -1/2 + (x-0)/(884/63) = -1/2 + [63/884]x \text{ (interpola en los 2 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{1,1}(x) = -1/2 + x([38/315] + [626/315]x)^{-1} = 1/2 [(-19+2x)/(19+313x)] \text{ (interpola en los 3 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,1}(x) = -1/2 + x([884/63] + (x-7)([148050/294533] + [63/589066]x)^{-1})^{-1} = 1/2 [(-1741+125x+7x^2)/(1741+32775x)] \text{ (interpola en los 4 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,2}(x) = -1/2 + x([884/63] + (x-7)([315/626] + (x-5)([1960006/63] + [91396/21]x)^{-1})^{-1})^{-1} = 1/2 [(-61-3x+x^2)/(61+1053x+146x^2)] \text{ (interpola en los 5 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{3,2}(x) = -1/2 + x([884/63] + (x-7)([315/626] + (x-5)([589066/63] + (x+5)(-[10227/12704044] - [7/40588]x)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = 1/2 [(-281-82x+4x^2+x^3)/(281+7432x+1783x^2)] \text{ (interpola en los 6 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{3,3}(x) = -1/2 + x([884/63] + (x-7)([315/626] + (x-5)([589066/63] + (x+5)([21/91396] + (x+6)(-[54896/7]-292x)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = -1/2 (x^3+2x^2+1)^{-1} \text{ (interpola en todos los puntos)}$$

La ecuación en fracciones continuas es

$$R(x) = -1/2 + \frac{884}{63} + \frac{x-7}{[315/626] + \frac{x-5}{[589066/63] + \frac{(x+5)}{[21/91396] + \frac{(x+6)}{[-40588/7] + \frac{(x+7)}{[-1/292]}}]}}$$

O también:

$$R(x) = -1/2 + \frac{x-0}{\frac{884}{63}} + \frac{x-7}{\frac{315}{626}} + \frac{x-5}{\frac{589066}{63}} + \frac{x+5}{\frac{21}{91396}} + \frac{x+6}{-\frac{40588}{7}} + \frac{x+7}{-1/292}$$

y la ecuación simplificada

$$R(x) = -1/2 (x^3+2x^2+1)^{-1}$$



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).

Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).