

Interpolación y Aproximación

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Dada la siguiente tabla de valores, obtener la función racional resultante por el algoritmo de Thiele.

x_k	1	-4	-5	0	3	6	7
y_k	-2/3	-21/74	-16/81	3/2	0	21/586	16/447

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\frac{-3+x^2-2x}{-2+2x^3+4x^2+2x}$$

This can be entered as:

$(-3+x^2-2*x)/(-2+2*x^3+4*x^2+2*x)$

Solution:

Sabemos que si tenemos los $2n+1$ puntos (x_i, y_i) , $i=0,1,\dots, 2n$, y queremos calcular la función racional $p(x)/q(x)$ (en la que tanto $p(x)$ como $q(x)$ son de grado n) que interpola en dichos puntos utilizando el algoritmo de Thiele en fracciones continuas, hemos de usar:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{\varphi[x_0,x_1]} + \frac{x-x_1}{\varphi[x_0,x_1,x_2]} + \frac{x-x_2}{\varphi[x_0,x_1,x_2,x_3]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]}$$

O también:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{|\varphi[x_0,x_1]} + \frac{x-x_1}{|\varphi[x_0,x_1,x_2]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{|\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]}$$

en las que aparecen las diferencias inversas $\varphi[x_0,\dots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores en los puntos conocidos. Las diferencias inversas se definen recursivamente como:

$$\varphi[x_i] = f(x_i) = y_i, \quad \varphi[x_i,x_j] = \frac{x_i-x_j}{y_i-y_j}, \quad \varphi[x_i,x_j,x_k] = \frac{x_j-x_k}{\varphi[x_i,x_j]-\varphi[x_i,x_k]}, \quad \varphi[x_i,\dots,x_l,x_m,x_n] = \frac{x_m-x_n}{\varphi[x_i,\dots,x_l,x_m]-\varphi[x_i,\dots,x_l,x_n]}$$

Calculamos entonces la tabla de diferencias inversas

x_k	y_k	$\varphi[x_0,x_k]$	$\varphi[x_0,x_1,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_2,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_3,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_4,x_k]$	$\varphi[x_0,\dots,x_5,x_k]$
1	-2/3						
-4	-21/74	-222/17					
-5	-16/81	-243/19	-323/87				
0	3/2	-6/13	221/696	232/187			
3	0	3	17/39	754/391	253/58		
6	21/586	1758/247	4199/8472	81896/31331	20273/4640	4640/11	
7	16/447	1341/157	2669/5241	101326/35649	23067/5278	5278/11	1/58

A efectos de notación, se ha expresado la diferencia inversa por $\varphi[x_0,\dots,x_i,x_k]$, en la que $k > i$. La diagonal de la tabla de diferencias inversas, en color rojo, es entonces: [-2/3, -222/17, -323/87, 232/187, 253/58, 4640/11, 1/58], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, la ecuación es

$$-2/3 + (x-1) \left(-222/17 + (x+4) \left(-323/87 + (x+5) \left(232/187 + x \left(253/58 + (x-3) \left([812/11] + 58x \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1}$$

((87 (187 (58))))

siendo las sucesivas funciones racionales las siguientes:

$$\Phi^{0,0}(x) = -2/3 \text{ (interpola en el primer punto)}$$

$$\Phi^{1,0}(x) = -2/3 + (x-1)/(-222/17) = -[131/222]-17/222 x \text{ (interpola en los 2 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{1,1}(x) = -2/3 + (x-1) (-[4566/323]-[87/323] x)^{-1} = -[(907+127 x)/(1522+29 x)] \text{ (interpola en los 3 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,1}(x) = -2/3 + (x-1) (-222/17 + (x+4) ([221/696]+[187/232] x)^{-1})^{-1} = -1/2 [(-3+80 x+11 x^2)/(1+65 x)] \text{ (interpola en los 4 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,2}(x) = -2/3 + (x-1) (-222/17 + (x+4) (-[323/87] + (x+5) ([232/187]+[58/253] x)^{-1})^{-1})^{-1} = -1/2 [(69-26 x+x^2)/(-23+27 x+29 x^2)] \text{ (interpola en los 5 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{3,2}(x) = -2/3 + (x-1) (-222/17 + (x+4) (-[323/87] + (x+5) ([232/187]+x ([20207/4640]+[11/4640] x)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = 1/2 [(-501+167 x-3 x^2+x^3)/(-167+214 x+205 x^2)] \text{ (interpola en los 6 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{3,3}(x) = -2/3 + (x-1) (-222/17 + (x+4) (-[323/87] + (x+5) ([232/187]+x ([253/58]+(x-3) ([812/11]+58 x)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = 1/2 [(-3+x^2-2 x)/(-1+x+2 x^2+x^3)] \text{ (interpola en todos los puntos)}$$

La ecuación en fracciones continuas es

$$R(x) = -2/3 + \frac{-222/17 + \frac{x-1}{x+4} + \frac{-323/87 + \frac{[232/187] + [(x-0)/([253/58] + [(x-3)/([4640/11] + [(x-6)/(1/58)])])]}{x+5}}{x+5}}$$

O también:

$$R(x) = -2/3 + \frac{x-1}{-222/17} + \frac{x+4}{87} + \frac{x+5}{187} + \frac{x-0}{58} + \frac{x-3}{11} + \frac{x-6}{1/58}$$

y la ecuación simplificada

$$R(x) = 1/2 \frac{-3+x^2-2 x}{-1+x+2 x^2+x^3}$$



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).