

Interpolación y Aproximación

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Dada la siguiente tabla de valores, obtener la función racional resultante por el algoritmo de Thiele.

x_k	-5	-2	1	-6	6	-7	2	7
y_k	146/21	7/2	0	777/94	-915/118	1256/131	-31/14	-482/53

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\frac{3-4x^3-2x^2+3x}{-2+3x^2+2x}$$

This can be entered as:

$$(3-4*x^3-2*x^2+3*x)/(-2+3*x^2+2*x)$$

Solution:

Sabemos que si tenemos los $2n+1$ puntos (x_i, y_i) , $i=0,1,\dots, 2n$, y queremos calcular la función racional $p(x)/q(x)$ (en la que tanto $p(x)$ como $q(x)$ son de grado n) que interpola en dichos puntos utilizando el algoritmo de Thiele en fracciones continuas, hemos de usar:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{\frac{x-x_0}{\varphi[x_0,x_1]} + \frac{x-x_1}{\varphi[x_0,x_1,x_2]} + \frac{x-x_2}{\varphi[x_0,x_1,x_2,x_3]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]}}$$

O también:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{|\varphi[x_0,x_1]} + \frac{x-x_1}{|\varphi[x_0,x_1,x_2]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{|\varphi[x_0,\dots,x_{2n}]}}$$

en las que aparecen las diferencias inversas $\varphi[x_0,\dots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores en los puntos conocidos. Las diferencias inversas se definen recursivamente como:

$$\varphi[x_i] = f(x_i) = y_i, \quad \varphi[x_i, x_j] = \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}, \quad \varphi[x_i, x_j, x_k] = \frac{x_j - x_k}{\varphi[x_i, x_j] - \varphi[x_i, x_k]}, \quad \varphi[x_i, \dots, x_l, x_m, x_n] = \frac{x_m - x_n}{\varphi[x_i, \dots, x_l, x_m] - \varphi[x_i, \dots, x_l, x_n]}$$

Calculamos entonces la tabla de diferencias inversas, y observamos que la columna 7 tiene sus 3 elementos iguales, por lo que paramos los cálculos en dicha columna

x_k	y_k	$\varphi[x_0, x_k]$	$\varphi[x_0, x_1, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_2, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_3, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_4, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_5, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_6, x_k]$
-5	146/21							
-2	7/2	-126/145						
1	0	-63/73	10585/21					
-6	777/94	-1974/2593	-375985/10122	482/37265				
6	-915/118	-2478/3313	480385/7266	-346/30305	-53713/109			
-7	1256/131	-2751/3625	-18125/399	19/1305	-67077/109	109/1028		
2	-31/14	-42/55	1595/42	-14/6525	-57825/109	109/1028		
7	-482/53	-3339/4465	129485/1743	-83/5945	-52685/109	109/1028		

A efectos de notación, se ha expresado la diferencia inversa por $\varphi[x_0,\dots,x_i,x_k]$, en la que $k > i$. La diagonal de la tabla de diferencias inversas, en color rojo, es entonces: [146/21, -126/145, 10585/21, 482/37265, -53713/109, 109/1028], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, la ecuación es

$$146/21 + (x+5) \left(-\frac{126}{145} + (x+2) \left(\frac{10585}{21} + (x-1) \left(\frac{482}{37265} + (x+6) \left(-\frac{59881}{109} + \frac{1028}{109} x \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1}$$

siendo las sucesivas funciones racionales las siguientes:

$$\Phi^{0,0}(x) = 146/21 \text{ (interpola en el primer punto)}$$

$$\Phi^{1,0}(x) = 146/21 + (x+5)/(-126/145) = [151/126] - [145/126] x \text{ (interpola en los 2 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{1,1}(x) = 146/21 + (x+5) \left(-[9156/10585] + [21/10585] x \right)^{-1} = 511 [(x-1)/(-436+x)] \text{ (interpola en los 3 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,1}(x) = 146/21 + (x+5) \left(-[126/145] + (x+2) \left([4319405/10122] + [37265/482] x \right)^{-1} \right)^{-1} = -1/2 [(-1431+1174 x+257 x^2)/(613+110 x)] \text{ (interpola en los 4 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,2}(x) = 146/21 + (x+5) \left(-[126/145] + (x+2) \left([10585/21] + (x-1) \left([5908/7788385] - [109/53713] x \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} = 3 [(-11705+11043 x+662 x^2)/(-28910-890 x+109 x^2)] \text{ (interpola en los 5 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{3,2}(x) = 146/21 + (x+5) \left(-[126/145] + (x+2) \left([10585/21] + (x-1) \left([482/37265] + (x+6) \left(-[59881/109] + [1028/109] x \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} = -[(-3+4 x^3+2 x^2-3 x)/(-2+3 x^2+2 x)] \text{ (interpola en todos los puntos)}$$

La ecuación en fracciones continuas es

$$R(x) = 146/21 + \frac{126}{145} + \frac{x+5}{\frac{x+2}{\frac{x-1}{[482/37265] + [(x+6)/(-53713/109) + [(x-6)/(109/1028)]]}}}$$

O también:

$$R(x) = 146/21 + \frac{x+5}{145} + \frac{x+2}{21} + \frac{x-1}{37265} + \frac{x+6}{109} + \frac{x-6}{1028}$$

y la ecuación simplificada

$$R(x) = -\frac{-3+4 x^3+2 x^2-3 x}{-2+3 x^2+2 x}$$



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).

Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).