

# Interpolación y Aproximación

## Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Dada la siguiente tabla de valores, obtener la función racional resultante por el algoritmo de Thiele.

$x_k$	0	1	-3	-4	-5	-6	7	3
$y_k$	-1/3	-2/3	-38/15	-79/41	-48/29	-[239/159]	-4/5	-40/57

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\frac{-1-x^3-4x}{3+x^3+2x^2+3x}$$

This can be entered as:

$$(-1-x^3-4*x)/(3+x^3+2*x^2+3*x)$$

### Solution:

Sabemos que si tenemos los  $2n+1$  puntos  $(x_i, y_i)$ ,  $i=0, 1, \dots, 2n$ , y queremos calcular la función racional  $p(x)/q(x)$  (en la que tanto  $p(x)$  como  $q(x)$  son de grado  $n$ ) que interpola en dichos puntos utilizando el algoritmo de Thiele en fracciones continuas, hemos de usar:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{\frac{x-x_0}{\varphi[x_0, x_1]} + \frac{x-x_1}{\varphi[x_0, x_1, x_2]} + \frac{x-x_2}{\varphi[x_0, x_1, x_2, x_3]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{\varphi[x_0, \dots, x_{2n}]}$$

O también:

$$\Phi^{n,n}(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{|\varphi[x_0, x_1]} + \frac{x-x_1}{|\varphi[x_0, x_1, x_2]} + \dots + \frac{x-x_{2n-1}}{|\varphi[x_0, \dots, x_{2n}]}$$

en las que aparecen las diferencias inversas  $\varphi[x_0, \dots, x_i]$ , obtenidas a partir de los valores en los puntos conocidos. Las diferencias inversas se definen recursivamente como:

$$\varphi[x_i] = f(x_i) = y_i, \quad \varphi[x_i, x_j] = \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j}, \quad \varphi[x_i, x_j, x_k] = \frac{x_j - x_k}{\varphi[x_i, x_j] - \varphi[x_i, x_k]}, \quad \varphi[x_i, \dots, x_l, x_m, x_n] = \frac{x_m - x_n}{\varphi[x_i, \dots, x_l, x_m] - \varphi[x_i, \dots, x_l, x_n]}$$

Calculamos entonces la tabla de diferencias inversas, y observamos que la columna 8 tiene sus 2 elementos iguales, por lo que paramos los cálculos en dicha columna

$x_k$	$y_k$	$\varphi[x_0, x_k]$	$\varphi[x_0, x_1, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_2, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_3, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_4, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_5, x_k]$	$\varphi[x_0, \dots, x_6, x_k]$
0	-1/3							
1	-2/3	-3						
-3	-38/15	15/11	-11/12					
-4	-79/41	123/49	-49/54	-108				
-5	-48/29	87/23	-23/26	-312/5	-5/228			
-6	-239/159	159/31	-31/36	-54	-1/27	2052/31		
7	-4/5	-15	-1/2	24	1/12	114	31/114	
3	-40/57	-57/7	-7/18	216/19	19/324	3078/31	31/114	

A efectos de notación, se ha expresado la diferencia inversa por  $\varphi[x_0, \dots, x_i, x_k]$ , en la que  $k > i$ . La diagonal de la tabla de diferencias inversas, en color rojo, es entonces: [-1/3, -3, -11/12, -108, -5/228, 2052/31, 31/114], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, la ecuación es

$$-1/3 + x(-3 + (x-1)(-11/12 + (x+3)(-108 + (x+4)(-5/228 + (x+5)([2736/31] + 114/31 x)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}$$

siendo las sucesivas funciones racionales las siguientes:

$$\Phi^{0,0}(x) = -1/3 \text{ (interpola en el primer punto)}$$

$$\Phi^{1,0}(x) = -1/3 + (x-0)/(-3) = -1/3 - 1/3 x \text{ (interpola en los 2 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{1,1}(x) = -1/3 + [x/(-21/11 - 12/11 x)] = -1/3 [(7+15 x)/(7+4 x)] \text{ (interpola en los 3 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,1}(x) = -1/3 + x(-3 + [(x-1)/(-17/18 - 1/108 x)])^{-1} = -1/3 [(66+139 x+x^2)/(66+37 x)] \text{ (interpola en los 4 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{2,2}(x) = -1/3 + x(-3 + (x-1)(-11/12 + (x+3)(-1452/5 - 228/5 x)^{-1})^{-1})^{-1} = -1/3 [(431+984 x+145 x^2)/(431+311 x+38 x^2)] \text{ (interpola en los 5 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{3,2}(x) = -1/3 + x(-3 + (x-1)(-11/12 + (x+3)(-108 + (x+4)([55/1026] + [31/2052] x)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = -1/3 [(2472+5879 x+1854 x^2+31 x^3)/(2472+2183 x+463 x^2)] \text{ (interpola en los 6 primeros puntos)}$$

$$\Phi^{3,3}(x) = -1/3 + x(-3 + (x-1)(-11/12 + (x+3)(-108 + (x+4)(-5/228 + (x+5)([2736/31] + 114/31 x)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = -[(1+x^3+4 x)/(3+x^3+2 x^2+3 x)] \text{ (interpola en todos los puntos)}$$

La ecuación en fracciones continuas es

$$R(x) = -1/3 + \frac{x-0}{-3 + \frac{x-1}{-11/12 + \frac{x+3}{-108 + \frac{(x+4)/(-5/228 + \frac{(x+5)/([2052/31] + \frac{(x+6)/(31/114)}{31})}}{31}}}}}$$

O también:

$$R(x) = -1/3 + \frac{x-0}{-3} + \frac{x-1}{-11/12} + \frac{x+3}{-108} + \frac{x+4}{-5/228} + \frac{x+5}{31} + \frac{x+6}{31/114}$$

y la ecuación simplificada

$$R(x) = -\frac{1+x^3+4 x}{3+x^3+2 x^2+3 x}$$



(cc) Jesús García Quesada 2010

#### Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).  
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).