

Interpolación y Aproximación

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = e^{-x}$ tomados en el intervalo $[-1,1]$, encontrar el spline cúbico natural $s(x)$ que interpola en dichos valores, y obtener el valor por interpolación en $x=0.8$ con cuatro decimales exactos, indicando también los coeficientes del polinomio $q_1(x)$ usado para interpolar en el punto pedido.

x_k	-1	0	1
y_k	2.718282	1.000000	.367879

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.18 & 0.815 & -0.272 & 0.442 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dados los $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, en los que las abscisas se suponen ordenadas, o sea:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

sabemos que para obtener el spline cúbico natural $s(x)$ que interpola en dichos puntos, hemos de obtener n polinomios $q_k(x)$, $k=0,1,\dots,n-1$ que constituyen el spline, de forma que en cada subintervalo actúa un polinomio diferente, o sea:

$$s(x) = q_k(x), \text{ si } x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Cada $q_k(x)$ es un polinomio de grado 3 con la siguiente expresión:

$$q_k(x) = \frac{\sigma_k}{6} \left[\frac{(x_{k+1}-x)^3}{h_k} - h_k(x_{k+1}-x) \right] + \frac{\sigma_{k+1}}{6} \left[\frac{(x-x_k)^3}{h_k} - h_k(x-x_k) \right] + \frac{y_k}{h_k}(x_{k+1}-x) + \frac{y_{k+1}}{h_k}(x-x_k), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

donde los valores $h_k = x_{k+1} - x_k$ son las diferencias entre abscisas consecutivas y los σ_k son los coeficientes a determinar, que se obtienen como solución del sistema:

$$h_{k-1} \sigma_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) \sigma_k + h_k \sigma_{k+1} = 6 (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) \quad k=1,2,\dots,n-1$$

donde los $f[x_i, x_{i+1}]$ se corresponden con los valores de la primera columna de la tabla de diferencias divididas. Este sistema tiene $n-1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas por lo que tiene infinitas soluciones. Como vamos a calcular los splines cúbicos naturales, haremos $\sigma_0 = 0$ en la primera ecuación y $\sigma_n = 0$ en la última, resultando el clásico sistema tridiagonal ya conocido (ver <http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/splines.pdf>)

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Obtener los valores $h_k = x_{k+1} - x_k$ y las diferencias divididas $f[x_k, x_{k+1}] = (y_{k+1} - y_k)/h_k$, $k=0,1,\dots,n-1$ resultando:

$$h_0 = 1 \Rightarrow f[x_0, x_1] = -1.718282$$

$$h_1 = 1 \Rightarrow f[x_1, x_2] = -.632121$$

2. Con estos valores, obtener la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes: (poner $\sigma_0 = \sigma_n = 0$)

$$\begin{bmatrix} 4.000000 & & \\ & \sigma_1 & \\ & & 6.516967 \end{bmatrix}$$

donde se ve claramente que es una matriz tridiagonal y simétrica[:)]. El sistema se puede resolver rápidamente por Gauss en dos pasos:

[i] hacer cero los elementos de la diagonal inferior,

[ii] ahora ya es triangular superior, y basta hacer una sustitución hacia atrás para obtener las soluciones.

3. Resolviendo entonces por Gauss, las soluciones σ_k que se obtienen son:

$$\sigma_1 = 1.62924186$$

4. Sustituyendo los valores en la expresión del polinomio $q_k(x)$ ya vista anteriormente se obtienen los siguientes polinomios,

$$q_0(z) = 1 + 0.27154031 z^3 + 0.81462093 z^2 - 1.17520118 z$$

$$q_1(z) = 1 - 1.17520118 z + 0.81462093 z^2 - 0.27154031 z^3$$

El polinomio $q_k(x)$ también se puede expresar en función de las potencias de $(x-x_k)$ como: (Taylor)

$$q_k(x) = \beta_0 + \beta_1 (x-x_k) + \beta_2 (x-x_k)^2 + \beta_3 (x-x_k)^3 = ((\beta_3 (x-x_k) + \beta_2) (x-x_k) + \beta_1) (x-x_k) + \beta_0$$

donde en la última igualdad se ha utilizado el anidamiento de Ruffini-Horner, ya conocido. Esta última expresión permite evaluar el polinomio $q_k(x)$ en un punto concreto con sólo 4 sumas y 3 multiplicaciones.

Los coeficientes β_i se calculan para cada $q_k(x)$ como:

$$\beta_0 = y_k, \quad \beta_1 = [f_{x_k, x_{k+1}}] - \frac{h_k}{6} (\sigma_{k+1} + 2 \sigma_k), \quad \beta_2 = \frac{\sigma_k}{2}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{6 h_k}$$

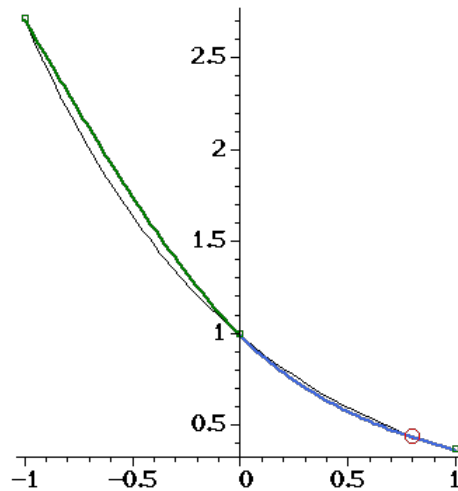
y obtenemos entonces

$$q_0(x) = 2.71828180 - 1.98982211 (x + 1) + 0.00000000 (x + 1)^2 + 0.27154031 (x + 1)^3, \quad x \in [-1, 0]$$

$$q_1(x) = 1.00000000 - 1.17520118 (x - 0) + 0.81462093 (x - 0)^2 - 0.27154031 (x - 0)^3, \quad x \in [0, 1]$$

que será la forma preferida de representación, por su facilidad de evaluación.

Como $0.8 \in [0, 1]$, el polinomio a considerar es $q_1(x)$, que evaluado en $x=0.8$ nos da 0.44216781 . En la siguiente gráfica aparece dibujada la gráfica de la función (en negro), la gráfica completa de todo el spline cúbico, donde cada polinomio $q_k(x)$ está dibujado con un color diferente, los puntos de interpolación y el punto donde se quiere interpolar.



El error real es la diferencia entre el valor de la función en el punto dado, o sea, $f(0.8)$, y el valor que nos proporciona el spline $q_1(x)$, evaluado en $x=0.8$ que nos da 0.44216781 .

El error real es por tanto:

$$\text{Error real} = |f(0.8) - p(0.8)| = |0.4493289641 - 0.44216781| = 0.0071611541$$



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.00	-
Total	1.00	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.