Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = x^5 - 205$ en el intervalo [2,3] por el método de Newton-Raphson, tomando como aproximación inicial $x_0 = 2$. Entrar también la cuarta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con seis cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 2.92 & 2.90 \end{bmatrix}$$

Solution:
Dada x_n, la aproximación más reciente a un cero α de la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, se quiere obtener una nueva aproximación a esa raíz. Consideramos el punto de intersección con el eje x de la tangente a f en el punto $(x_n,f(x_n))$, tomando ese punto de intersección x_{n+1} como siguiente aproximación. El punto de intersección viene definido por: (ver apuntes de clase, donde se obtuvo analíticamente)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,...$$

Tiene orden de convergencia 2 (*cuadrática*) y constante de error asintótico

$$\frac{f''(\alpha)}{2\, f'(\alpha)}$$

Partiendo de x_0=2 para comenzar el proceso, obtenemos el valor de la primera iteración:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-173}{80} = 4.1625$$

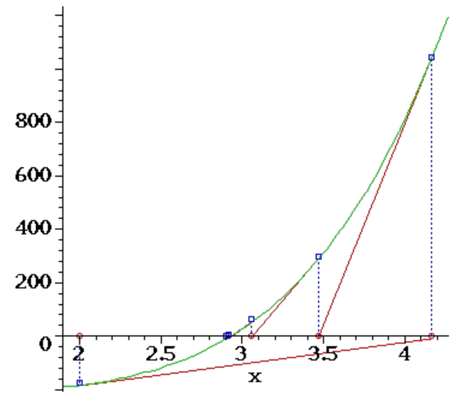
y las iteraciones que se obtienen son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^2$
0	2.000000000000000	-173.000000000000000	80.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	4.162500000000000	1044.600621610412598	1501.021767700195312	0.5195195195	2.1625000000	0.0000000000
2	3.466573635646932	295.613029407196409	722.057400222759191	0.2007533771	0.6959263644	0.1488164901
3	3.057169855122007	62.053234917774367	436.765452319162507	0.1339159418	0.4094037805	0.8453280295
4	2.915095351316176	5.505682750047178	361.061401739403002	0.0487375151	0.1420745038	0.8476419668
5	2.899846746166127	0.057298965440089	353.565751770408732	0.0052584176	0.0152486052	0.7554362537
6	2.899684685884120	0.000006404040197	353.486721163158586	0.0000558889	0.0001620603	0.6969736391
7	2.899684667767343	0.000000000000080	353.486712329039252	0.0000000062	0.0000000181	0.6898072659
8	2.899684667767342	-0.000000000000000	353.486712329039141	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 7. Como es $f'(x)=5\ x^4$ y $f''(x)=20\ x^3$, siendo la aproximación a la raiz α = 2.8996846677673426296, la constante de error asintótico vale aproximadamente 0.68973017039812509975, que es el valor hacia el que tiende la última columna de la tabla.

Sigue una gráfica con la representación de la función, y las tangentes trazadas desde los diferentes puntos (inicial y siguientes), junto a su intersección con el eje x, que produce la siguiente aproximación. Aparecen los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, y ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución.

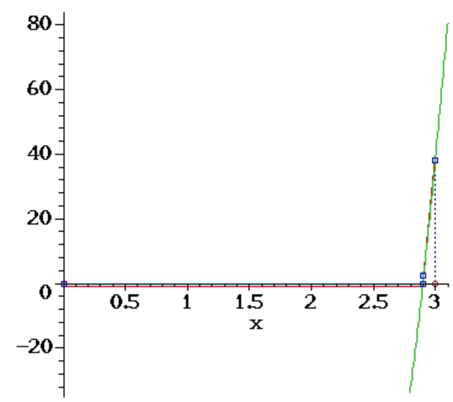
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos sobre la curva el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



Partiendo ahora de $x_0 = 3$, las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\|e_k\| / \|x_k\|$	$\|e_k\|$	$\|e_k\| / \|e_{k-1}\|^2$
0	3.000000000000000	38.000000000000000	405.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	2.906172839506173	2.303769023340379	356.661114929706260	0.0322854715	0.0938271605	0.0000000000
2	2.899713573477707	0.010217988239578	353.500807568323319	0.0022275531	0.0064592660	0.7337126803
3	2.899684668343628	0.000000203709345	353.486712610048103	0.0000099684	0.0000289051	0.6928012221
4	2.899684667767342	0.000000000000000	353.486712329039141	0.0000000002	0.0000000006	0.6897439214
5	2.899684667767342	-0.000000000000000	353.486712329039141	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 4. La gráfica correspondiente es:



Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.50	-
Total	1.50	0.00