Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = x^3-4$ en el intervalo $[-1,2]$ por el método de Newton-Raphson, tomando como aproximación inicial $x_0 = -1$. Entrar también la cuarta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con seis cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 1.84 & 1.59 \end{bmatrix}$$

Solution:
Dada x_n, la aproximación más reciente a un cero α de la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, se quiere obtener una nueva aproximación a esa raíz. Consideramos el punto de intersección con el eje x de la tangente a f en el punto $(x_n,f(x_n))$, tomando ese punto de intersección x_{n+1} como siguiente aproximación. El punto de intersección viene definido por: (ver apuntes de clase, donde se obtuvo analíticamente)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,...$$

Tiene orden de convergencia 2 (*cuadrática*) y constante de error asintótico

$$\frac{f''(\alpha)}{2\, f'(\alpha)}$$

Partiendo de $x_0=-1$ para comenzar el proceso, obtenemos el valor de la primera iteración:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{-5}{3} = 0.6666666667$$

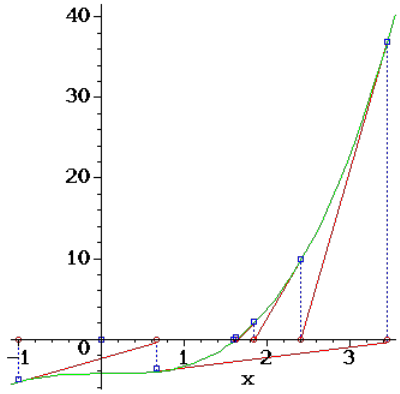
y las iteraciones que se obtienen son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^2$
0	-1.000000000000000	-5.000000000000000	3.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.666666666666667	-3.703703703703704	1.333333333333333	2.5000000000	1.6666666667	0.0000000000
2	3.444444444444444	36.865569272976680	35.592592592592593	0.8064516129	2.7777777778	1.0000000000
3	2.408679230739585	9.974520130111057	17.405206909788710	0.4300137604	1.0357652137	0.1342351717
4	1.835602439305328	2.184945519235106	10.108308945551016	0.3122009315	0.5730767914	0.5341831423
5	1.619449022249673	0.247191517190558	7.867845406996262	0.1334734308	0.2161534171	0.6581675468
6	1.588031079419892	0.004764599623633	7.565528127610525	0.0197842116	0.0314179428	0.6724399918
7	1.587401301889062	0.000001889283631	7.559528679717268	0.0003967349	0.0006297775	0.6380161494
8	1.587401051968239	0.000000000000297	7.559526299369614	0.0000001574	0.0000002499	0.6301270440
9	1.587401051968199	-0.000000000000000	7.559526299369239	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
10	1.587401051968199	0.000000000000000	7.559526299369239	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 8. Como es $f'(x)=3\, x^2$ y $f''(x)=6\, x$, siendo la aproximación a la raiz $\alpha = 1.5874010519681994747$, la constante de error asintótico vale aproximadamente 0.6299605249474365824, que es el valor hacia el que tiende la última columna de la tabla.

Sigue una gráfica con la representación de la función, y las tangentes trazadas desde los diferentes puntos (inicial y siguientes), junto a su intersección con el eje x, que produce la siguiente aproximación. Aparecen los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, y ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución.

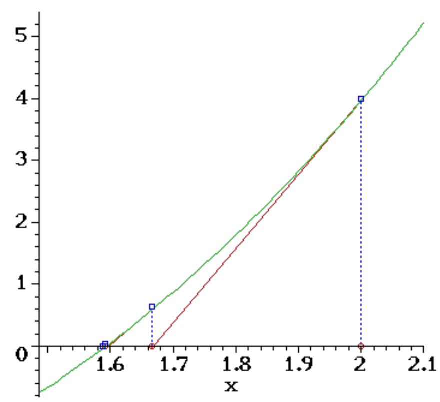
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos sobre la curva el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



Partiendo ahora de x_0 = 2, las iteraciones son:

NEWTON-RAPHSON						
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^2$
0	2.000000000000000	4.000000000000000	12.000000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	1.666666666666667	0.629629629629630	8.333333333333333	0.2000000000	0.3333333333	0.0000000000
2	1.591111111111111	0.028111890260631	7.594903703703704	0.0474860335	0.0755555556	0.6800000000
3	1.587409696141633	0.000065346212250	7.559608630213418	0.0023317326	0.0037014150	0.6483880029
4	1.587401052015271	0.000000000355837	7.559526299817566	0.0000054455	0.0000086441	0.6309363555
5	1.587401051968199	0.000000000000000	7.559526299369239	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
6	1.587401051968199	-0.000000000000000	7.559526299369239	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia se produjo en la iteración: 5. La gráfica correspondiente es:



Mark summary:

Question	Value	Your mark