

# Raices

## Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

Obtener una raíz de la función  $f(x) = e^{-3x} - 36.6$  en el intervalo  $[-2, -1]$  por el método de bisección. Entrar también la séptima iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -1.20 \\ -1.20 \end{bmatrix}$$

### Solution:

Dada una función continua, el método de bisección localiza la raíz real de  $f(x)=0$  obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo  $[a,b]$  en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que  $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$  por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raíz de  $f(x)$ , o sea,  $\exists \alpha \in ]a,b[$ , tal que  $f(\alpha)=0$ .

La función se evalúa entonces en el punto medio  $m=(a+b)/2$  y si  $f(m) \neq 0$ , su signo decide cuál de los subintervalos  $]a,m[$  ó  $]m,b[$  contiene la raíz. Se continúa la búsqueda de la raíz en el subintervalo en el que  $f(m)$  tiene signo contrario a  $f(a)$  ó  $f(b)$ . Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones  $\{x_n\}$  que converge a una raíz concreta  $\alpha \in ]a,b[$  con la propiedad:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n=0,1,2,\dots$$

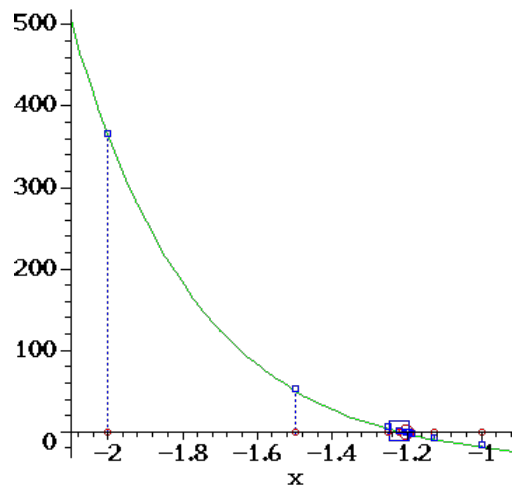
Terminamos las iteraciones cuando  $|x_n - \alpha| < \epsilon$ , o cuando  $|f(x_n)| < \epsilon$ , siendo  $\epsilon$  la tolerancia con la cual se quiere calcular la raíz. Como en general no se conoce a priori el valor de  $\alpha$ , en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo:  $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ , o bien  $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$ , respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico  $1/2$  (ver tabla). Llamando  $x_0=a$ ,  $x_1=b$  para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

| <b>MÉTODO DE BISECCIÓN</b> |                     |                     |                           |              |                     |
|----------------------------|---------------------|---------------------|---------------------------|--------------|---------------------|
| k                          | $x_k$               | $f(x_k)$            | $ x_k - x_{k-1}  /  x_k $ | $ e_k $      | $ e_k  /  e_{k-1} $ |
| 0                          | -2.0000000000000000 | 366.828793492735123 | 0.0000000000              | 0.0000000000 | 0.0000000000        |
| 1                          | -1.0000000000000000 | -16.514463076812332 | 0.0000000000              | 0.0000000000 | 0.0000000000        |
| 2                          | -1.5000000000000000 | 53.417131300521814  | 0.3333333333              | 0.5000000000 | 0.0000000000        |
| 3                          | -1.2500000000000000 | 5.921082000062783   | 0.2000000000              | 0.2500000000 | 0.5000000000        |
| 4                          | -1.1250000000000000 | -7.375716218765060  | 0.1111111111              | 0.1250000000 | 0.5000000000        |
| 5                          | -1.1875000000000000 | -1.348784885411457  | 0.0526315789              | 0.0625000000 | 0.5000000000        |
| 6                          | -1.2187500000000000 | 2.115885738147229   | 0.0256410256              | 0.0312500000 | 0.5000000000        |
| 7                          | -1.2031250000000000 | 0.342956250241515   | 0.0129870130              | 0.0156250000 | 0.5000000000        |
| 8                          | -1.1953125000000000 | -0.512826409566280  | 0.0065359477              | 0.0078125000 | 0.5000000000        |
| 9                          | -1.1992187500000000 | -0.087442226731583  | 0.0032573290              | 0.0039062500 | 0.5000000000        |
| 10                         | -1.2011718750000000 | 0.127126547039735   | 0.0016260163              | 0.0019531250 | 0.5000000000        |
| 11                         | -1.2001953125000000 | 0.019685005402880   | 0.0008136697              | 0.0009765625 | 0.5000000000        |

|    |                    |                    |              |              |              |
|----|--------------------|--------------------|--------------|--------------|--------------|
| 12 | -1.199707031250000 | -0.033917841821448 | 0.0004070004 | 0.0004882812 | 0.5000000000 |
| 13 | -1.199951171875000 | -0.007126233183312 | 0.0002034588 | 0.0002441406 | 0.5000000000 |
| 14 | -1.200073242187500 | 0.006276931467607  | 0.0001017191 | 0.0001220703 | 0.5000000000 |
| 15 | -1.200012207031250 | -0.000425264406038 | 0.0000508621 | 0.0000610352 | 0.5000000000 |
| 16 | -1.200042724609375 | 0.002925680129695  | 0.0000254304 | 0.0000305176 | 0.5000000000 |
| 17 | -1.200027465820312 | 0.001250169513312  | 0.0000127154 | 0.0000152588 | 0.5000000000 |
| 18 | -1.200019836425781 | 0.000412442966727  | 0.0000063577 | 0.0000076294 | 0.5000000000 |
| 19 | -1.200016021728516 | -0.000006413116355 | 0.0000031789 | 0.0000038147 | 0.5000000000 |
| 20 | -1.200017929077148 | 0.000203014326008  | 0.0000015894 | 0.0000019073 | 0.5000000000 |
| 21 | -1.200016975402832 | 0.000098300455032  | 0.0000007947 | 0.0000009537 | 0.5000000000 |
| 22 | -1.200016498565674 | 0.000045943631890  | 0.0000003974 | 0.0000004768 | 0.5000000000 |
| 23 | -1.200016260147095 | 0.000019765248405  | 0.0000001987 | 0.0000002384 | 0.5000000000 |
| 24 | -1.200016140937805 | 0.000006676063684  | 0.0000000993 | 0.0000001192 | 0.5000000000 |
| 25 | -1.200016081333160 | 0.000000131473080  | 0.0000000497 | 0.0000000596 | 0.5000000000 |
| 26 | -1.200016051530838 | -0.000003140821784 | 0.0000000248 | 0.0000000298 | 0.5000000000 |
| 27 | -1.200016066431999 | -0.000001504674389 | 0.0000000124 | 0.0000000149 | 0.5000000000 |
| 28 | -1.200016073882580 | -0.000000686600664 | 0.0000000062 | 0.0000000075 | 0.5000000000 |
| 29 | -1.200016077607870 | -0.000000277563794 | 0.0000000031 | 0.0000000037 | 0.5000000000 |
| 30 | -1.200016079470515 | -0.000000073045358 | 0.0000000016 | 0.0000000019 | 0.5000000000 |

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 12. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión  $\{x_n\}$  sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.

*Sugerencia:* asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



(cc) Jesús García Quesada 2011