Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = 2^x - 1.3$ en el intervalo $[-1,1]$ por el método de la secante. Entrar también la quinta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con cuatro cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.378 & 0.379 \end{bmatrix}$$

Solution:
Dados los puntos $(x_n, f(x_n))$ (aproximación actual) y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ (aproximación anterior), se quiere obtener una nueva aproximación a una raíz de la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (la raiz α no ha de estar necesariamente en el intervalo definido por los valores x_n y x_{n-1}). Para ello se obtiene el punto de intersección con el eje x de la recta que los une, tomando ese punto como siguiente aproximación, sin tener en cuenta los signos de $f(x_{n-1})$, $f(x_n)$ y $f(x_{n+1})$. La fórmula que proporciona ese punto de intersección es: (ver apuntes de clase, donde se obtuvo analíticamente)

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n=1,2,\ldots$$

Tiene orden de convergencia $[(1+\sqrt{5})/2] \approx 1.618$ (*superlineal*) y constante de error asintótico

$$\left(\frac{f''(\alpha)}{2\,f'(\alpha)}\right)^{[(\sqrt{5}-1)/2]} \approx \left(\frac{f''(\alpha)}{2\,f'(\alpha)}\right)^{0.618}$$

Llamando $x_0=a=-1$, $x_1=b=1$ para arrancar el proceso, usamos la fórmula para calcular x_2:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - (0.7)\frac{1-(-1)}{0.7-(-0.8)} = 0.06666666667$$

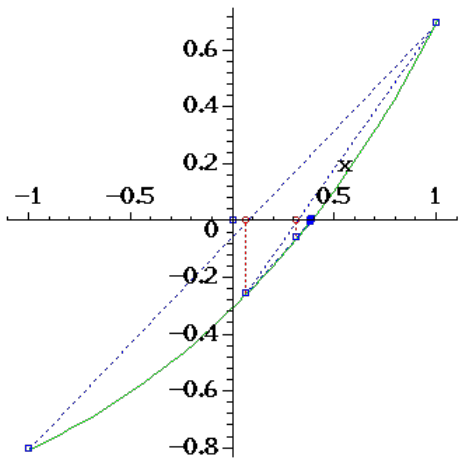
y las iteraciones que se obtienen son, llamando $e_k = x_k - x_{k-1}$ para la estimación del error absoluto:

MÉTODO DE LA SECANTE					
k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert e_k \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert^{1.618}$
0	-1.000000000000000	-0.800000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	1.000000000000000	0.700000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	0.066666666666667	-0.252705877179373	14.0000000000	0.9333333333	0.0000000000
3	0.314233963510729	-0.056648711739368	0.7878438539	0.2475672968	0.2768048977
4	0.385766000626228	0.006553318975936	0.1854285681	0.0715320371	0.6847071686
5	0.378348956412443	-0.000146569417974	0.0196037126	0.0074170442	0.5292354269
6	0.378511214615802	-0.000000368220044	0.0004286748	0.0001622582	0.4530781501
7	0.378511623276768	0.000000000020759	0.0000010797	0.0000004087	0.5536671752
8	0.378511623253730	-0.000000000000000	0.0000000001	0.0000000000	0.0000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 7. Como es $f'(x)=2^{x}\ln(2)$ y $f''(x)=2^{x}(\ln(2))^{2}$, siendo la aproximación a la raiz $\alpha = 0.37851162327676763116$, la constante de error asintótico vale aproximadamente 0.51950962431359768091, que es el valor hacia el que tiende la última columna de la tabla.

Sigue una gráfica con la representación de la función, y las diferentes secantes que unen los puntos de las dos últimas aproximaciones obtenidas, junto a su intersección con el eje x, que produce la siguiente aproximación. Aparecen los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, y ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución.

Sugerencia: asignar sobre la curva a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	1.50	-
Total	1.50	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.