

Sistemas lineales

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

1.1

Obtener la factorización de Crout de la siguiente matriz, utilizando pivotación parcial

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & 4 & 7/12 & -5/4 & 1 \\ -2 & 2 & -13/2 & -1/13 & -8/13 \\ -2 & 0 & -7/3 & \frac{188}{39} & \frac{173}{188} \\ 0 & -4 & -5/3 & -44/39 & \frac{326}{47} \end{bmatrix}$$

1.2

Introducir el vector de permutaciones:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

1.3

Entrar el valor del determinante:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

-5216

1.4

Resolver el sistema lineal $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ cuando \mathbf{b} es el vector siguiente

$$\begin{bmatrix} -16 \\ 11 \\ 43 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Solution:

Factorización

En cada etapa de la resolución se muestran los valores actuales de la matriz y del vector de permutaciones de filas:

Tratando la (sub)columna 1

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & 6 & -4 \end{bmatrix}, [1,2,3,4,5]$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[-2, 6, 2, 0, -2]$$

Máximo en fila 2 con valor = 6 ==> Intercambio de filas 1 y 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -6 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -6 & -1 & 5 \end{bmatrix}, [2, 1, 3, 4, 5]$$

Tratando la (sub)fila 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -6 & 5 \\ 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -6 & -1 & 5 \end{bmatrix}, [2, 1, 3, 4, 5]$$

Tratando la (sub)columna 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -6 & 5 \\ 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & -6 & -1 & 5 \end{bmatrix}, [2, 1, 3, 4, 5]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[0, 4, -4, 2]$$

Máximo en fila 3 con valor = 4 ==> Intercambio de filas 2 y 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -6 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 5 \\ 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ -2 & 2 & -6 & -1 & 5 \end{bmatrix}, [2, 3, 1, 4, 5]$$

Tratando la (sub)fila 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7/12 & -5/4 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & 5 \\ 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ -2 & 2 & -6 & -1 & 5 \end{bmatrix}, [2, 3, 1, 4, 5]$$

Tratando la (sub)columna 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7/3 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & -5/3 & 4 & 5 \\ 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ -2 & 2 & -13/2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, [2, 3, 1, 4, 5]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[-7/3, -5/3, -13/2]$$

Máximo en fila 5 con valor = 13/2 ==> Intercambio de filas 3 y 5

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -7/3 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & -5/3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & -13/2 & -1 & 5 \\ 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, [2, 3, 5, 4, 1]$$

Tratando la (sub)fila 3

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 & \\ 2 & 4 & 7/12 & -5/4 & 1 & \\ -2 & 2 & -13/2 & -1/13 & -8/13 & \\ 0 & -4 & -5/3 & 4 & 5 & \\ -2 & 0 & -7/3 & 6 & -4 & \end{array} \right], [2,3,5,4,1]$$

Tratando la (sub)columna 4

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 & \\ 2 & 4 & 7/12 & -5/4 & 1 & \\ -2 & 2 & -13/2 & -1/13 & -8/13 & \\ 0 & -4 & -5/3 & -44/39 & 5 & \\ -2 & 0 & -7/3 & \frac{188}{39} & -4 & \end{array} \right], [2,3,5,4,1]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$\left[-44/39, \frac{188}{39} \right]$$

Máximo en fila 5 con valor = $188/39$ ==> Intercambio de filas 4 y 5

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 & \\ 2 & 4 & 7/12 & -5/4 & 1 & \\ -2 & 2 & -13/2 & -1/13 & -8/13 & \\ -2 & 0 & -7/3 & \frac{188}{39} & -4 & \\ 0 & -4 & -5/3 & -44/39 & 5 & \end{array} \right], [2,3,5,1,4]$$

Tratando la (sub)fila 4

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 & \\ 2 & 4 & 7/12 & -5/4 & 1 & \\ -2 & 2 & -13/2 & -1/13 & -8/13 & \\ -2 & 0 & -7/3 & \frac{188}{39} & \frac{173}{39} & \\ 0 & -4 & -5/3 & -44/39 & 5 & \end{array} \right], [2,3,5,1,4]$$

Tratando la (sub)columna 5

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 & \\ 2 & 4 & 7/12 & -5/4 & 1 & \\ -2 & 2 & -13/2 & -1/13 & -8/13 & \\ -2 & 0 & -7/3 & \frac{188}{39} & \frac{173}{39} & \\ 0 & -4 & -5/3 & -44/39 & \frac{326}{47} & \end{array} \right], [2,3,5,1,4]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 & \\ 2 & 4 & 7/12 & -5/4 & 1 & \\ -2 & 2 & -13/2 & -1/13 & -8/13 & \\ -2 & 0 & -7/3 & \frac{188}{39} & \frac{173}{39} & \\ 0 & -4 & -5/3 & -44/39 & \frac{326}{47} & \end{array} \right], [2,3,5,1,4]$$

La factorización final es la siguiente, en la que aparecen las matrices L y U, y el vector de permutaciones:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & \\ -2 & 2 & -13/2 & 0 & 0 & \\ -2 & 0 & -7/3 & \frac{188}{39} & 0 & \\ 0 & -4 & -5/3 & -44/39 & \frac{326}{47} & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 & \\ 0 & 1 & 7/12 & -5/4 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & -1/13 & -8/13 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{173}{39} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right], [2,3,5,1,4]$$

Determinante

El valor del determinante viene dado por el producto de los elementos de la diagonal principal, que es la diagonal principal de L, ya que $|U| = 1$. Además, hay que considerar el número realizado de permutaciones de filas (4), ya que el determinante cambia de signo en cada una. Por tanto, es

$$|A| = |L| |U| = \prod_{i=1}^5 l_{ii} \times (-1)^{\text{número de permutaciones}} = -5216$$

Resolución del sistema

Sabemos que $PA = LU$, siendo P la matriz que premultiplicada por A produce las permutaciones de filas en A que se han realizado, si hay pivotación. Sin pivotación, P sería la matriz identidad.

Queremos resolver $Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$. Llamando $y = Ux$, podemos resolver el sistema en dos pasos:

- [1] $Ly = Pb$, de donde se obtiene el vector y,
- [2] $Ux = y$, de donde ya se puede obtener el vector solución x.

P.b es el vector resultante de aplicar las permutaciones indicadas por el vector filas = [2,3,5,1,4] al vector

$$b = \begin{bmatrix} -16 \\ 11 \\ 43 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O también se puede obtener premultiplicando por la matriz P, que se puede construir fácilmente a partir del vector de permutaciones. En nuestro caso es

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P.b = \begin{bmatrix} 11 \\ 43 \\ 1 \\ -16 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Resolvemos entonces el primer sistema triangular

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -13/2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -7/3 & 188 & 0 \\ 0 & -4 & -5/3 & -44/39 & 326 \\ & & & & 47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 43 \\ 1 \\ -16 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/6 \\ 59/6 \\ 30/13 \\ 271 \\ 188 \\ 7 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia adelante ($y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow y_3 \Rightarrow y_4 \Rightarrow y_5$). Resolvemos ahora

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 7/12 & -5/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/13 & -8/13 \\ & & & 173 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 188 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/6 \\ 59/6 \\ 30/13 \\ 271 \\ 188 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

por sustitución hacia atrás ($x_5 \Rightarrow x_4 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$), resultando el vector pedido.



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1.1	1.50	-
1.2	0.50	-
1.3	0.50	-
1.4	1.00	-
Total	3.50	0.00

[New Version](#) Click here to see a new version of this quiz.

[New Quiz](#) Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the [administrator](#).
Mathematical questions can be sent to the [teacher](#).