

Sistemas lineales

Question 1

[Top 1](#) [Bottom](#) [Focus](#) [Help](#)

1.1

Obtener la factorización de Crout de la siguiente matriz, utilizando pivotación parcial

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 & -4 & 4 \\ -5 & 3 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 \\ -1 & -13/5 & 11/4 & \frac{79}{77} & \frac{185}{77} \\ -3 & 21/5 & -3/4 & \frac{576}{77} & -25/96 \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -37/11 & \frac{407}{96} \end{bmatrix}$$

1.2

Introducir el vector de permutaciones:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3

Entrar el valor del determinante:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

2442

1.4

Resolver el sistema lineal $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ cuando \mathbf{b} es el vector siguiente

$$\begin{bmatrix} -9 \\ 100 \\ 4 \\ 66 \\ -27 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -9 & 2 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution:

Factorización

En cada etapa de la resolución se muestran los valores actuales de la matriz y del vector de permutaciones de filas:

Tratando la (sub)columna 1

$$\left[\begin{array}{ccccc} -2 & 0 & -3 & -4 & 4 \\ -5 & 3 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & -4 & -1 & 3 \end{array} \right], [1,2,3,4,5]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[-2, -5, -1, -3, -1]$$

Máximo en fila 2 con valor = 5 ==> Intercambio de filas 1 y 2

$$\left[\begin{array}{ccccc} -5 & 3 & 1 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & -4 & -1 & 3 \end{array} \right], [2,1,3,4,5]$$

Tratando la (sub)fila 1

$$\left[\begin{array}{ccccc} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 \\ -2 & 0 & -3 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & -4 & -1 & 3 \end{array} \right], [2,1,3,4,5]$$

Tratando la (sub)columna 2

$$\left[\begin{array}{ccccc} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 \\ -2 & -6/5 & -3 & -4 & 4 \\ -1 & -13/5 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 21/5 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & -28/5 & -4 & -1 & 3 \end{array} \right], [2,1,3,4,5]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[-6/5, -13/5, 21/5, -28/5]$$

Máximo en fila 5 con valor = 28/5 ==> Intercambio de filas 2 y 5

$$\left[\begin{array}{ccccc} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 \\ -1 & -28/5 & -4 & -1 & 3 \\ -1 & -13/5 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 21/5 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & -6/5 & -3 & -4 & 4 \end{array} \right], [2,5,3,4,1]$$

Tratando la (sub)fila 2

$$\left[\begin{array}{ccccc} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 \\ -1 & -13/5 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 21/5 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & -6/5 & -3 & -4 & 4 \end{array} \right], [2,5,3,4,1]$$

Tratando la (sub)columna 3

$$\left[\begin{array}{ccccc} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 \\ -1 & -13/5 & 11/4 & 3 & -5 \\ -3 & 21/5 & -3/4 & -3 & 3 \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -4 & 4 \end{array} \right], [2,5,3,4,1]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$[11/4, -3/4, -5/2]$$

Máximo en fila 3 con valor = 11/4

$$\left[\begin{array}{ccccc} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 \\ -1 & -13/5 & 11/4 & 3 & -5 \\ -3 & 21/5 & -3/4 & -3 & 3 \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -4 & 4 \end{array} \right], [2,5,3,4,1]$$

Tratando la (sub)fila 3

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 & \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 & \\ -1 & -13/5 & 11/4 & \frac{79}{77} & \frac{185}{77} & , [2,5,3,4,1] \\ -3 & 21/5 & -3/4 & -3 & 3 & \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -4 & 4 & \end{array} \right]$$

Tratando la (sub)columna 4

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 & \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 & \\ -1 & -13/5 & 11/4 & \frac{79}{77} & \frac{185}{77} & , [2,5,3,4,1] \\ -3 & 21/5 & -3/4 & \frac{576}{77} & 3 & \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -37/11 & 4 & \end{array} \right]$$

Elementos de la (sub)columna donde buscar el máximo:

$$\left[-\frac{576}{77}, -37/11 \right]$$

Máximo en fila 4 con valor = 576/77

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 & \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 & \\ -1 & -13/5 & 11/4 & \frac{79}{77} & \frac{185}{77} & , [2,5,3,4,1] \\ -3 & 21/5 & -3/4 & \frac{576}{77} & 3 & \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -37/11 & 4 & \end{array} \right]$$

Tratando la (sub)fila 4

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 & \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 & \\ -1 & -13/5 & 11/4 & \frac{79}{77} & \frac{185}{77} & , [2,5,3,4,1] \\ -3 & 21/5 & -3/4 & \frac{576}{77} & -25/96 & \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -37/11 & 4 & \end{array} \right]$$

Tratando la (sub)columna 5

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 & \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 & \\ -1 & -13/5 & 11/4 & \frac{79}{77} & \frac{185}{77} & , [2,5,3,4,1] \\ -3 & 21/5 & -3/4 & \frac{576}{77} & -25/96 & \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -37/11 & \frac{407}{96} & \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 & \\ -1 & -28/5 & 3/4 & 11/28 & -13/28 & \\ -1 & -13/5 & 11/4 & \frac{79}{77} & \frac{185}{77} & , [2,5,3,4,1] \\ -3 & 21/5 & -3/4 & \frac{576}{77} & -25/96 & \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -37/11 & \frac{407}{96} & \end{array} \right]$$

La factorización final es la siguiente, en la que aparecen las matrices L y U, y el vector de permutaciones:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & -28/5 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & -13/5 & 11/4 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 & \\ 0 & 1 & 3/4 & 11/28 & -13/28 & \\ \hline & & & & & , [2,5,3,4,1] \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -3 & 21/5 & -3/4 & -\frac{576}{77} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{79}{77} & -\frac{185}{77} \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -37/11 & -\frac{407}{96} & 0 & 0 & 0 & 1 & -25/96 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Determinante

El valor del determinante viene dado por el producto de los elementos de la diagonal principal, que es la diagonal principal de L, ya que $|U| = 1$. Además, hay que considerar el número realizado de permutaciones de filas (2), ya que el determinante cambia de signo en cada una. Por tanto, es

$$|A| = |L| |U| = \prod_{i=1}^5 l_{ii} \times (-1)^{\text{número de permutaciones}} = 2442$$

Resolución del sistema

Sabemos que $PA = LU$, siendo P la matriz que premultiplicada por A produce las permutaciones de filas en A que se han realizado, si hay pivotación. Sin pivotación, P sería la matriz identidad.

Queremos resolver $Ax = b \Rightarrow PAx = Pb \Rightarrow LUx = Pb$. Llamando $y = Ux$, podemos resolver el sistema en dos pasos:

- [1] $Ly = Pb$, de donde se obtiene el vector y,
- [2] $Ux = y$, de donde ya se puede obtener el vector solución x.

P.b es el vector resultante de aplicar las permutaciones indicadas por el vector pfilas = [2,5,3,4,1] al vector

$$b = \begin{bmatrix} -9 \\ 100 \\ 4 \\ 66 \\ -27 \end{bmatrix}$$

O también se puede obtener premultiplicando por la matriz P, que se puede construir fácilmente a partir del vector de permutaciones. En nuestro caso es

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P.b = \begin{bmatrix} 100 \\ -27 \\ 4 \\ 66 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Resolvemos entonces el primer sistema triangular

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & 100 & y_1 & -20 \\ -1 & -28/5 & 0 & 0 & 0 & y_2 & -27 & y_2 & 235 \\ -1 & -13/5 & 11/4 & 0 & 0 & y_3 & 4 & y_3 & 28 \\ -3 & 21/5 & -3/4 & -\frac{576}{77} & 0 & y_4 & 66 & y_4 & 163 \\ -2 & -6/5 & -5/2 & -37/11 & -\frac{407}{96} & y_5 & -9 & y_5 & 77 \\ & & & & & & & & 355 \\ & & & & & & & & 96 \\ & & & & & & & & 5 \end{array} \right]$$

por sustitución hacia adelante ($y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow y_3 \Rightarrow y_4 \Rightarrow y_5$). Resolvemos ahora

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -3/5 & -1/5 & -6/5 & -2/5 & x_1 & -20 & x_1 & -9 \\ 0 & 1 & 3/4 & 11/28 & -13/28 & x_2 & 28 & x_2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{79}{77} & -\frac{185}{77} & x_3 & 163 & x_3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -25/96 & x_4 & 77 & x_4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_5 & 355 & x_5 & 5 \\ & & & & & & 96 & & \\ & & & & & & 5 & & \end{array} \right]$$

por sustitución hacia atrás ($x_5 \Rightarrow x_4 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$), resultando el vector pedido.



(cc) Jesús García Quesada 2010

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1.1	1.50	-