Sistemas lineales

Question 1

Top 1 Bottom Focus Help

1.1

Aplicar a la siguiente matriz el método de Gauss-Jordan, utilizando pivotación parcial por filas, y resolver los dos sistemas lineales con vectores de términos independientes que aparecen en el último apartado. Entrar la diagonal de la matriz resultante.

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & -7 \\ 1 & 7 & -3 & 6 \\ 8 & 5 & -1 & 4 \\ 3 & -9 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -87/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{221}{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{883}{663} \end{bmatrix}$$

1.2

Introducir el vector de permutaciones:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3

Entrar el valor del determinante:
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-883$$

1.4

Resolver los sistemas lineales A $\mathbf{x_i} = \mathbf{b}$ cuando $\mathbf{b}$ es uno de los vectores siguientes

$$\begin{bmatrix} 56 \\ 42 \\ 55 \\ -55 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 44 \\ 56 \\ 35 \\ -96 \end{bmatrix}$$

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution:

Reducción

Añadimos a la matriz de coeficientes los vectores de términos independientes a efectos de ir reflejando en dichos vectores las operaciones que se realizan con la matriz para reducirla a una matriz diagonal. En cada etapa de la reducción se muestran los valores actuales de la matriz ampliada y del vector de permutaciones de filas o columnas, en su caso.
Añadimos también a la derecha de los vectores de términos independientes la matriz identidad para obtener la inversa al mismo tiempo.

$$\left[\begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & -7 & 56 & 44 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -3 & 6 & 42 & 56 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -1 & 4 & 55 & 35 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & -6 & 8 & -55 & -96 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [1,2,3,4]\right]$$

Explorando la columna 1
Máximo en fila 3 con valor = 8
Intercambio de filas 1 y 3

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 & 4 & 55 & 35 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 & 6 & 42 & 56 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 7 & -7 & 56 & 44 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -6 & 8 & -55 & -96 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [3,2,1,4]\right]$$

Tratando la columna 1
F2 = F2 - (1/8) F1
F3 = F3 - (3/4) F1
F4 = F4 - (3/8) F1

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 & 4 & 55 & 35 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 51/8 & -23/8 & 11/2 & 281/8 & 413/8 & 0 & 1 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1/4 & 31/4 & -10 & 59/4 & 71/4 & 1 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & -87/8 & -45/8 & 13/2 & -605/8 & -\frac{873}{8} & 0 & 0 & -3/8 & 1 \end{bmatrix}, [3,2,1,4]\right]$$

Explorando la columna 2
Máximo en fila 4 con valor = 87/8
Intercambio de filas 2 y 4

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 & 4 & 55 & 35 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -87/8 & -45/8 & 13/2 & -605/8 & -\frac{873}{8} & 0 & 0 & -3/8 & 1 \\ 0 & 1/4 & 31/4 & -10 & 59/4 & 71/4 & 1 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 51/8 & -23/8 & 11/2 & 281/8 & 413/8 & 0 & 1 & -1/8 & 0 \end{bmatrix}, [3,4,1,2]\right]$$

Tratando la columna 2
F1 = F1 - (-40/87) F2
F3 = F3 - (-2/87) F2
F4 = F4 - (-17/29) F2

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 0 & -104/29 & \frac{608}{87} & \frac{1760}{87} & -\frac{440}{29} & 0 & 0 & 24/29 & 40/87 \\ 0 & -87/8 & -45/8 & 13/2 & -605/8 & -\frac{873}{8} & 0 & 0 & -3/8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{221}{29} & -\frac{857}{87} & \frac{1132}{87} & \frac{442}{29} & 1 & 0 & -22/29 & 2/87 \\ 0 & 0 & -\frac{179}{29} & \frac{270}{29} & -\frac{267}{29} & -\frac{358}{29} & 0 & 1 & -10/29 & 17/29 \end{bmatrix}, [3,4,1,2]\right]$$

Explorando la columna 3
Máximo en fila 3 con valor = 221/29

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 0 & -104/29 & \frac{608}{87} & \frac{1760}{87} & -\frac{440}{29} & 0 & 0 & 24/29 & 40/87 \\ 0 & -87/8 & -45/8 & 13/2 & -605/8 & -\frac{873}{8} & 0 & 0 & -3/8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{221}{29} & -\frac{857}{87} & \frac{1132}{87} & \frac{442}{29} & 1 & 0 & -22/29 & 2/87 \\ 0 & 0 & -\frac{179}{29} & \frac{270}{29} & -\frac{267}{29} & -\frac{358}{29} & 0 & 1 & -10/29 & 17/29 \end{bmatrix},[3,4,1,2]\right]$$

Tratando la columna 3
F1 = F1 - (-8/17) F3
F2 = F2 - (-1305/1768) F3
F4 = F4 - (-179/221) F3

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 40/17 & \frac{448}{17} & -8 & 8/17 & 0 & 8/17 & 8/17 \\ 0 & -87/8 & 0 & -\frac{1363}{1768} & -\frac{116725}{1768} & -\frac{783}{8} & \frac{1305}{1768} & 0 & -\frac{1653}{1768} & \frac{899}{884} \\ 0 & 0 & \frac{221}{29} & -\frac{857}{87} & \frac{1132}{87} & \frac{442}{29} & 1 & 0 & -22/29 & 2/87 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{883}{663} & \frac{883}{663} & 0 & \frac{179}{221} & 1 & -\frac{212}{221} & \frac{401}{663} \end{bmatrix},[3,4,1,2]\right]$$

Tratando la columna 4
F1 = F1 - (1560/883) F4
F2 = F2 - (-4089/7064) F4
F3 = F3 - (-189397/25607) F4

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 24 & -8 & -\frac{848}{883} & -\frac{1560}{883} & \frac{1912}{883} & -\frac{528}{883} \\ 0 & -87/8 & 0 & 0 & -261/4 & -\frac{783}{8} & \frac{4263}{3532} & \frac{4089}{7064} & -\frac{10527}{7064} & \frac{9657}{7064} \\ 0 & 0 & \frac{221}{29} & 0 & \frac{663}{29} & \frac{442}{29} & \frac{179010}{25607} & \frac{189397}{25607} & -\frac{201110}{25607} & \frac{115141}{25607} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{883}{663} & \frac{883}{663} & 0 & \frac{179}{221} & 1 & -\frac{212}{221} & \frac{401}{663} \end{bmatrix},[3,4,1,2]\right]$$

El resultado final es el que aparece arriba, en el que las dos columnas que siguen a la matriz diagonal corresponden a los vectores de términos independientes modificados por el proceso de reducción. La matriz diagonal resultante y el vector de permutaciones si existe son

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -87/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{221}{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{883}{663} \end{bmatrix},[3,4,1,2]\right]$$

Si tomamos la matriz ampliada anterior y dividimos cada fila por el elemento que aparece en la diagonal principal de la matriz diagonal obtenida, obtenemos en este orden, la matriz identidad de orden 4, la solución de los dos sistemas de ecuaciones lineales solicitados y en las últimas 4 columnas la matriz inversa de la matriz original.

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -\frac{106}{883} & -\frac{195}{883} & \frac{239}{883} & -\frac{66}{883} \end{bmatrix}\right]$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 9 & -\frac{98}{883} & -\frac{47}{883} & \frac{121}{883} & -\frac{111}{883} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & \frac{810}{883} & \frac{857}{883} & -\frac{910}{883} & \frac{521}{883} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{537}{883} & \frac{663}{883} & -\frac{636}{883} & \frac{401}{883} \end{matrix} \Bigg]$$

La matriz inversa es:

$$\begin{bmatrix} -\frac{106}{883} & -\frac{195}{883} & \frac{239}{883} & -\frac{66}{883} \\ -\frac{98}{883} & -\frac{47}{883} & \frac{121}{883} & -\frac{111}{883} \\ \frac{810}{883} & \frac{857}{883} & -\frac{910}{883} & \frac{521}{883} \\ \frac{537}{883} & \frac{663}{883} & -\frac{636}{883} & \frac{401}{883} \end{bmatrix}$$

Nota: ¿qué ocurre si la pivotación es por columnas? ¿Y si es por filas?

Determinante

El valor del determinante viene dado por el producto de los elementos de la diagonal de la matriz obtenida. Además, hay que considerar el número realizado de permutaciones de filas (2) ya que el determinante cambia de signo en cada una. Por tanto, es

$$|A| = \prod_{i=1}^{4} d_{ii} \times (-1)^{\text{número de permutaciones}} = -883$$

Resolución del sistema

Por cada vector de términos independientes, debemos resolver el sistema diagonal D $\mathbf{x_i} = \mathbf{v_i}$, $i=1,2$. Despejando cada incógnita, las obtenemos en el orden: $x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_4$, ya que las permutaciones han sido sólo de filas, y no afectan a las soluciones de un sistema lineal.
Resolvemos entonces el primer sistema diagonal

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -87/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{221}{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{883}{663} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -261/4 \\ \frac{663}{29} \\ \frac{883}{663} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y ahora el segundo

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -87/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{221}{29} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{883}{663} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -\frac{783}{8} \\ \frac{442}{29} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ambos directamente, resultando los vectores solicitados.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1.1	1.50	-
1.2	0.50	-