Tutorial de Análisis Numérico
Interpolación : Introducción. Método de los coeficientes indeterminados

Jesús García Quesada
Departamento de Informática y Sistemas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 Campus de Tafira, España
Email : jgarcia@dis.ulpgc.es

2 de Octubre de 2000, v0.3

Índice General

1. INTRODUCCIÓN

Consideremos una familia de funciones en una sola variable x:

$$\Phi(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

que tiene $n+1$ parámetros $a_0, a_1, \ldots, a_n$, cuyos valores caracterizan a las funciones individuales de ésta familia.

El problema de la interpolación para Φ consiste en determinar estos parámetros a_i de forma que para $n+1$ pares de números reales (o complejos) (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ se cumple:

$$\Phi(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_n) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Llamaremos a los pares (x_i, y_i) *puntos soporte* o también *nodos*, siendo x_i la abcisa soporte e y_i la ordenada soporte.

Tendremos un *problema de interpolación lineal* si Φ depende linealmente de los parámetros a_i:

$$\Phi(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0\,\phi_0(x) + a_1\,\phi_1(x) + a_2\,\phi_2(x) + \cdots + a_n\,\phi_n(x)$$

Esta clase de problemas incluye la interpolación polinómica clásica:

$$\Phi(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

y también a la interpolación trigonométrica:

$$\Phi(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 e^{xi} + a_2 e^{2xi} + \cdots + a_n e^{nxi}, \quad (i^2 = -1)$$

siendo $e^{kxi} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$, por la fórmula de De Moivre.

La clase de problemas de interpolación lineal también incluye la *interpolación por splines*. En el caso especial de *splines cúbicos*, las funciones ϕ suponen derivables dos veces con derivada continua para $x \in [x_0, x_n]$ y que coincide con algún polinomio cúbico en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de una partición dada $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

Hay dos esquemas no lineales que son de importancia, la *interpolación racional*:

$$\Phi(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

y la *interpolación exponencial*

$$\Phi(x_i; a_0, a_1, \ldots, a_n, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = a_0 e^{\lambda_0 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + a_n e^{\lambda_n x}$$

La interpolación racional es importante en el proceso de mejor aproximación a una función dada por otra que sea fácilmente evaluada en un ordenador.

La interpolación exponencial se usa en el análisis de procesos radioactivos.

2. COEFICIENTES INDETERMINADOS

Es de uso exclusivo en los problemas de interpolación lineal, ya que se trata de plantear un sistema lineal en base al conjunto de puntos dado, apareciendo los coeficientes a calcular en una combinacion lineal con las funciones base $\phi_i(x)$.

Supongamos un conjunto de puntos $(x_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, n$ donde $y_i = f(x_i)$. Se dice que la función g interpola a f en los puntos (x_i, y_i) si

$$g(x_i) = f(x_i) = y_i, \text{ para cada } i = 0, 1, \cdots, n$$

En el caso de interpolación polinómica buscamos un polinomio

$$g(x) = p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

donde se quieren determinar los coeficientes a_j, $0 \leqslant j \leqslant n$.

Por tanto se han de verificar las $n + 1$ ecuaciones :

$$y_j = p(x_j) = a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \cdots + a_n x_j^n, \quad 0 \leqslant j \leqslant n$$

que expresado en forma matricial el sistema queda :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

o bien $V\vec{a} = \vec{y}$, donde V es una matriz conocida con el nombre de matriz de Vandermonde, que es no singular ya que si los puntos x_i son distintos su determinante vale:

$$|V| = (x_n - x_{n-1}) \cdots (x_n - x_0)(x_{n-1} - x_{n-2}) \cdots (x_1 - x_0) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

que asegura que existe *solución única* si $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$.

Este método de obtener los coeficientes mediante el planteamiento de un sistema lineal se llama **método de coeficientes indeterminados**.

Ejemplo. Encontrar el polinomio de interpolación $p(x)$ de segundo grado tal que $p(0) = -1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 7$.

Solución:

Buscamos el polinomio de grado dos $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ que verifica las condiciones anteriormente expuestas. Por el método de coeficientes indeterminados con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ obtenemos :

$$\begin{aligned} a_0 + 0 + 0 &= -1 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 2 \\ a_0 + 2a_2 + 4a_2 &= 7 \end{aligned} \tag{1}$$

y resolviendo el sistema (p.e., por Gauss) obtenemos $p(x) = x^2 + 2x - 1$. ■

El método de los coeficientes indeterminados es un procedimiento con amplia aplicación a otros tipos de problemas de interpolación. Por ejemplo, si buscamos una función no polinómica en el sentido usual como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Queremos encontrar un polinomio trigonométrico $p(x)$ de la forma

$$p(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos(2x) + c_3 \cos(3x)$$

tal que $p(x_j) = y_j,\ 0 \leqslant j \leqslant 3$ siendo $x_0 = 0, x_1 = \pi/6, x_2 = \pi/4, x_3 = \pi/3$ con $y_0 = 0, y_1 = 2 - \sqrt{3}/2, y_2 = 1 + \sqrt{2}/2, y_3 = 3/2$.

Solución:

El sistema lineal es :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - \sqrt{3}/2 \\ 1 + \sqrt{2}/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema (por eliminación gaussiana, p.e.) produce $c_0 = 1, c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = -2$. Por tanto :

$$p(x) = 1 - \cos(x) + 2\cos(2x) - 2\cos(3x)$$

$\blacksquare$

3. TEST

A continuación vienen algunas preguntas tipo test para probar la comprensión de la teoría expuesta. Por favor, lea cuidadosamente el texto y las posibles respuestas que aparecen.

Inicio del Test Responder a las siguientes cuestiones.

1. Dados los puntos $(0,0), (1,1), (-1,1), (2,4)$, el polinomio de grado uno que interpola en dichos puntos es

☐ x ☐ $x-1$ ☐ no existe ☐ $x+2$

2. el polinomio de grado dos que interpola en los mismos puntos es

☐ x ☐ x^2 ☐ x^2-1 ☐ $x+2$

3. el polinomio de grado tres que interpola en los mismos puntos es

☐ x^3 ☐ x^2 ☐ x^2-1 ☐ x^3

4. si se añade el nodo $(3,9)$, conjeture cúal sería el polinomio de grado cuatro que interpola en los mismos puntos

☐ x^4 ☐ x^3 ☐ x^2 ☐ $x+2$

Final del Test Puntos: Correctas

Test. Con los mismos datos, se quiere encontrar una función del tipo $a.x^b$, cual sería la solución?

(a) x^2 (b) No existe (c) No se puede calcular

4. PROBLEMAS

Problema 1. Un polinomio de tercer grado pasa por los puntos $(0,-1), (1,1), (2,1)$ y $(3,-2)$. Obtener su valor para $x = 1.2$.

Referencias

[Act90] F.S. Acton. *Numerical Methods That (Usually) Work*. The Mathematical Association of America, Washington, 1990.

[Atk89] K. E. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley, New York, 2nd. edition, 1989.

[BF80] R.L. Burden and D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1980.

[CC89] S.C. Chapra and R.P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill International, New York, second edition, 1989.

[CdB80] S. D. Conte and C. de Boor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw–Hill, New York, third edition, 1980.

[DB74] Germund Dahlquist and Åke Björck. *Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[Fad59] V.N. Faddeeva. *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover Publications, Inc, New York, 1959.

[Frö79] C.-E. Fröberg. *Introduction to Numerical Analysis*. Adison–Wesley, Reading, Massachusetts, 2nd. edition, 1979.

[GW89] C.F. Gerald and P.O. Wheatley. *Applied Numerical Analysis*. Addison–Wesley Publishing Co., Reading, Massachusets, fourth edition, 1989.

[Hen72] P. Henrici. *Elementos de Análisis Numérico*. Ed. Trillas, México, 1972.

[Hil74] F. B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw–Hill, New York, second edition, 1974.

[KC94] D. Kincaid and W. Cheney. *Análisis Numérico : las matemáticas del cálculo científico*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.

[Mar87] M. J. Maron. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Macmillan Publishing Co., New York, second edition, 1987.

[ML91] M. J. Maron and R. J. Lopez. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Wadsworth, Belmont, California, third edition, 1991.

[RR78] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz. *A First Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 2nd. edition, 1978.

[Sch89] H.R. Schwarz. *Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[Wer84] W. Werner. *Mathematics of Computation*, 43:205–217, 1984.

[YG73a] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume I. Dover Publications, New York, 1973.

[YG73b] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume II. Dover Publications, New York, 1973.

Soluciones a los Problemas

Problema 1.

Para el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, el sistema que resulta es:

$$\begin{aligned} a_0 + 0 + 0 + 0 &= -1 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_0 + 2a_2 + 4a_2 + 8a_3 &= 1 \\ a_0 + 3a_2 + 9a_2 + 27a_3 &= -2 \end{aligned} \tag{2}$$

y resolviendo el sistema (p.e., por Gauss) se obtiene

$$p(x) = -\frac{1}{6}(x^3 + 3x^2 - 16x + 6)$$

y en $x = 1.2$ por Ruffini-Horner por ejemplo se obtiene $p(1.2) = 1.192$.

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Aunque la función x^2 realmente es la solución al problema de interpolación propuesto, no es posible obtenerla a partir de la alplicación del método de los coeficientes indeterminados a la función $a.x^b$, ya que no está expresada de forma lineal y no permite por tanto plantear un sistema lineal que permita obtener el a y el b de la fórmula. Final del Test