Derivación e integración

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener la derivada primera de la función f(x) = ln(5 x) en el punto 1.1 utilizando extrapolación de Richardson con la fórmula progresiva y comenzando con h=0.2. Dar el resultado con cuatro cifras decimales correctas. Entrar también con seis decimales correctos los valores solicitados de la tabla.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 0.909 & 0.909 & 0.909 \end{bmatrix}$$

Solution:
Para estimar la derivada primera usando dos puntos conocemos las fórmulas:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i h^{2i} \text{ (fórmula central, con error de truncamiento de la forma } h^{2i}\text{)}$$

y también:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{i=1}^{\infty} b_i h^{i} \text{ (fórmula progresiva, con error de truncamiento de la forma } h^{i}\text{)}$$

y considerando la forma que tienen los errores de truncamiento de estas fórmulas que aproximan la derivada, podemos construir una tabla cuya primera columna T_0^i (i=0,1,...) se obtiene utilizando la primera fórmula o la segunda para diferentes h, y el resto de las columnas se pueden generar con la recurrencia:

$$T_k^i = \frac{(h_i/h_{i+k})^{\beta} \quad T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{(h_i/h_{i+k})^{\beta} - 1}, \quad \text{para k=1,2, ...(columna)}, \quad \text{i=1,2, ...(fila)}$$

siendo $\beta = 2{,}1$ respectivamente. Si es $h_0 = h$ y $h_{i+1}=h_i/2 \quad \forall i \geq 0 \Rightarrow h_i/h_{i+k} = 2^k$ y resultan las conocidas fórmulas:

$$T_k^i = \frac{4^k \quad T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{4^k - 1}, \text{ o bien } \quad T_k^i = \frac{2^k \quad T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1} = T_{k-1}^{i+1} + \frac{T_{k-1}^{i+1} - T_{k-1}^{i}}{2^k - 1}$$

para las fórmulas central ($\beta = 2$) y progresiva ($\beta = 1$), respectivamente.

La tabla resultante en este caso es:

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON

h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.20000000	**0.83527042**							
0.10000000	0.87011377	**0.90495712**						
5.000000e-02	0.88903525	0.90795673	**0.90895661**					
2.500000e-02	0.89891423	0.90879322	0.90907204	**0.90908854**				
1.250000e-02	0.90396442	0.90901461	0.90908840	0.90909074	**0.90909089**			
6.250000e-03	0.90651801	0.90907159	0.90909059	0.90909090	0.90909091	**0.90909091**		
3.125000e-03	0.90780203	0.90908605	0.90909087	0.90909091	0.90909091	0.90909091	**0.90909091**	
1.562500e-03	0.90844586	0.90908969	0.90909090	0.90909091	0.90909091	0.90909091	0.90909091	**0.90909091**

Siguiendo un criterio conservador para establecer la convergencia, esta se produjo al calcular la linea 4, ya que $|T_4^4 - T_3^3| = |.90909088700402445860 - (.90908853605564001620)| = .235094838444240e-5 < .1e-3$

Esta tabla se ha construido partiendo del valor inicial $h_0 = h$ y obteniendo los siguientes h_i multiplicando el valor

inmediatamente anterior por 1/2. Por tanto, las h_i consideradas resultan de multiplicar h por los elementos del vector [1,1/2,1/4,1/8,1/16,1/32,1/64,1/128].
Sin embargo, es posible considerar otras alternativas y tomar dos (o más) números diferentes, p.e., [1/5,3/5] para generar otro vector [1,1/5,3/25,3/125,[9/625],[9/3125],[27/15625],[27/78125]] y obtener una tabla que en general converge más rápidamente como la siguiente. Es necesario utilizar la fórmula general que aparece en primer lugar.

EXTRAPOLACIÓN DE RICHARDSON								
h	T_0^i	T_1^i	T_2^i	T_3^i	T_4^i	T_5^i	T_6^i	T_7^i
0.20000000	**0.83527042**							
4.000000e-02	0.89295207	**0.90737248**						
2.400000e-02	0.89931549	0.90886062	**0.90906355**					
4.800000e-03	0.90711319	0.90906262	0.90909016	**0.90909081**				
2.880000e-03	0.90790290	0.90908747	0.90909085	0.90909091	**0.90909091**			
5.760000e-04	0.90885298	0.90909049	0.90909091	0.90909091	0.90909091	**0.90909091**		
3.456000e-04	0.90894813	0.90909086	0.90909091	0.90909091	0.90909091	0.90909091	**0.90909091**	
6.912000e-05	0.90906235	0.90909090	0.90909091	0.90909091	0.90909091	0.90909091	0.90909091	**0.90909091**

En este caso, la convergencia se produjo al calcular la linea 3, ya que $|T_3^3-T_2^2|$=|.90909081461886652389 - (.90906354624361446818)| = .2726837525205571e-4 < .1e-3

Mark summary:

Question	**Value**	**Your mark**
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.