Interpolación y Aproximación

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas con los datos de la tabla que aparece a continuación, e interpolar en el punto $x = -1$.

x_k	4	−4	3	−6
y_k	78	−210	28	−602

You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$-2+2x^3-4x^2+4x$$

This can be entered as:

-2+2*x^3-4*x^2+4*x

Solution:

Sabemos que si tenemos los n+1 puntos (x_i,y_i), i=0... n, y queremos calcular el polinomio que interpola en dichos puntos utilizando la fórmula de interpolación de Newton en diferencias divididas, hemos de usar: (ver p.e. el tutorial http://pcm.dis.ulpgc.es/an/tutor/newton.pdf,)

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j)$$

O también:

$$p_n(x)= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0)+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,x_1, \ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

en las que aparecen las diferencias divididas $f[x_0,\ldots,x_i]$, obtenidas a partir de los valores proporcionados por la tabla inicial. Calculamos entonces la tabla de diferencias divididas:

x_k	y_k	$f[x_k \mid\mid x_{k+1}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+2}]$	$f[x_k \mid\mid x_{k+3}]$
4	78			
-4	-210	36		
3	28	34	2	
-6	-602	70	-18	2

donde se ha expresado por brevedad la diferencia dividida $f[x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+p}]$ como $f[x_k \mid\mid x_{k+p}]$.La diagonal de la tabla de diferencias divididas, en color rojo, es entonces: [78,36,2,2], que se corresponde exactamente con el conjunto de valores que aparece en la fórmula y por tanto, los polinomios de Newton son los siguientes:

$p_0(x) = 78$ (interpola en el primer punto)

$p_1(x) = 36\,(x-4) + p_0(x) = 36\,x-66$ (interpola en los 2 primeros puntos)

$p_2(x) = 2\,(x-4)\,(x+4) + p_1(x) = 2\,x^2-98+36\,x$ (interpola en los 3 primeros puntos)

$p_3(x) = 2\,(x-4)\,(x+4)\,(x-3) + p_2(x) = -2+2\,x^3-4\,x^2+4\,x$ (interpola en todos los puntos)

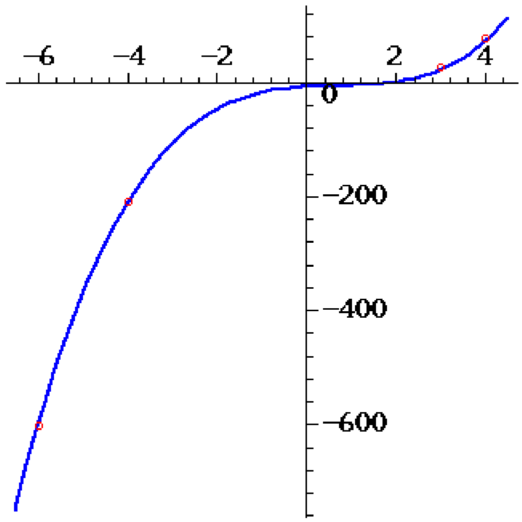
O también:

$$p(x) = 78 + 36\,(x-4) + 2\,(x-4)\,(x+4) + 2\,(x-4)\,(x+4)\,(x-3) = -2+2\,x^3-4\,x^2+4\,x$$

La gráfica del polinomio de interpolación:

$$p(x) = -2+2\,x^3-4\,x^2+4\,x$$

y de los puntos (x_i,y_i), i=0...3 es la que viene a continuación



Si se quiere interpolar en un punto concreto, lo mejor es tomar el polinomio de interpolación en su forma de Newton y reordenarlo al estilo Ruffini-Horner expresando el polinomio como:

$$p(x) = 78 + (x-4)\,(36 + (x+4)\,(2 + (x-3)\,(2)))$$

lo que supone realizar a lo sumo 6 sumas/restas y 3 multiplicaciones para interpolar en un punto x. Para interpolar entonces en $x = -1$, basta sustituir la x de la expresión reordenada anterior por su valor -1 para obtener $\mathbf{p(-1) = -12}$.
Si se tuviera el polinomio en su forma normal, como combinación lineal de $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$, deberíamos usar el algoritmo clásico de Ruffini-Horner, ya que supondría 3 sumas y 3 multiplicaciones, como se ve a continuación. En este caso, para obtener el valor en $x = -1$ del polinomio de interpolación $p(x) = -2+2\,x^3-4\,x^2+4\,x$ colocamos los coeficientes de mayor a menor exponente y operamos de la forma usual:

−1	2	−4	4	−2
	2	−6	10	**−12**

o bien

$$p(-1) = ((2\,.\,(-1) -4)\,.\,(-1) +4)\,.\,(-1) -2 = -12$$

obteniendo el mismo resultado que antes, $p(-1) = -12$, con el mismo número de multiplicaciones y la mitad de sumas/restas.

Mark summary:

Question	Value	Your mark
1	3.00	-
Total	3.00	0.00

New Version Click here to see a new version of this quiz.
New Quiz Click here to select a new quiz.

If you have technical problems, you can send email to the administrator.
Mathematical questions can be sent to the teacher.