Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = x^3 - 12.2$ en el intervalo [2,3] por el método de bisección. Entrar también la octava iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} 2.30 & 2.30 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de f(x)=0 obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo [a,b] en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de f(x), o sea, $\exists \alpha \in]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio m=(a+b)/2 y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos]a,m[ó]m,b[contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que f(m) tiene signo contrario a f(a) ó f(b). Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in]a,b[$ con la propiedad:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n=0,1,2,...$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando x_0=a, x_1=b para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert / \lvert x_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert$	$\lvert e_k \rvert / \lvert e_{k-1} \rvert$
0	2.000000000000000	-4.200000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	3.000000000000000	14.800000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	2.500000000000000	3.425000000000000	0.2000000000	0.5000000000	0.0000000000
3	2.250000000000000	-0.809375000000000	0.1111111111	0.2500000000	0.5000000000
4	2.375000000000000	1.196484375000000	0.0526315789	0.1250000000	0.5000000000
5	2.312500000000000	0.166455078125000	0.0270270270	0.0625000000	0.5000000000
6	2.281250000000000	-0.328143310546875	0.0136986301	0.0312500000	0.5000000000
7	2.296875000000000	-0.082526397705078	0.0068027211	0.0156250000	0.5000000000
8	2.304687500000000	0.041542339324951	0.0033898305	0.0078125000	0.5000000000
9	2.300781250000000	-0.020597350597382	0.0016977929	0.0039062500	0.5000000000
10	2.302734375000000	0.010446141660213	0.0008481764	0.0019531250	0.5000000000
11	2.301757812500000	-0.005082189850509	0.0004242681	0.0009765625	0.5000000000

12	2.302246093750000	0.002680329210125	0.0002120891	0.0004882812	0.5000000000
13	2.302001953125000	-0.001201341950218	0.0001060558	0.0002441406	0.5000000000
14	2.302124023437500	0.000739390716990	0.0000530251	0.0001220703	0.5000000000
15	2.302062988281250	-0.000231001344173	0.0000265132	0.0000610352	0.5000000000
16	2.302093505859375	0.000254188254434	0.0000132564	0.0000305176	0.5000000000
17	2.302078247070312	0.000011591847147	0.0000066283	0.0000152588	0.5000000000
18	2.302070617675781	-0.000109705150507	0.0000033141	0.0000076294	0.5000000000
19	2.302074432373047	-0.000049056752179	0.0000016571	0.0000038147	0.5000000000
20	2.302076339721680	-0.000018732477640	0.0000008285	0.0000019073	0.5000000000
21	2.302077293395996	-0.000003570321528	0.0000004143	0.0000009537	0.5000000000
22	2.302077770233154	0.000004010761239	0.0000002071	0.0000004768	0.5000000000
23	2.302077531814575	0.000000220219463	0.0000001036	0.0000002384	0.5000000000
24	2.302077412605286	-0.000001675051130	0.0000000518	0.0000001192	0.5000000000
25	2.302077472209930	-0.000000727415858	0.0000000259	0.0000000596	0.5000000000
26	2.302077502012253	-0.000000253598204	0.0000000129	0.0000000298	0.5000000000
27	2.302077516913414	-0.000000016689372	0.0000000065	0.0000000149	0.5000000000
28	2.302077524363995	0.000000101765045	0.0000000032	0.0000000075	0.5000000000
29	2.302077520638704	0.000000042537837	0.0000000016	0.0000000037	0.5000000000
30	2.302077518776059	0.000000012924232	0.0000000008	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 11. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.