Raices

Question 1 Top 1 Bottom Focus Help

Obtener una raiz de la función $f(x) = -\sin(7x) - 0.4$ en el intervalo $[-1,0]$ por el método de bisección. Entrar también la cuarta iteración resultante del proceso iterativo y dar los resultados con tres cifras decimales correctas.
You have not attempted this yet

The teacher's answer was:

$$\begin{bmatrix} -0.875 & 2.30 \end{bmatrix}$$

Solution:

Dada una función continua, el metodo de bisección localiza la raíz real de $f(x)=0$ obteniendo una sucesión de intervalos de longitudes cada vez más pequeñas. Suponemos que se conoce un intervalo $[a,b]$ en cuyos extremos la función tiene valores con signos diferentes, o sea, se verifica que $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow$ por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe una raiz de $f(x)$, o sea, $\exists\alpha \in\ ]a,b[$, tal que $f(\alpha)=0$.

La función se evalúa entonces en el punto medio $m=(a+b)/2$ y si $f(m) \neq 0$, su signo decide cuál de los subintervalos $]a,m[$ ó $]m,b[$ contiene la raiz. Se continúa la búsqueda de la raiz en el subintervalo en el que $f(m)$ tiene signo contrario a $f(a)$ ó $f(b)$. Y así sucesivamente. El método genera por tanto una sucesión de aproximaciones $\{x_n\}$ que converge a una raiz concreta $\alpha \in\ ]a,b[$ con la propiedad:

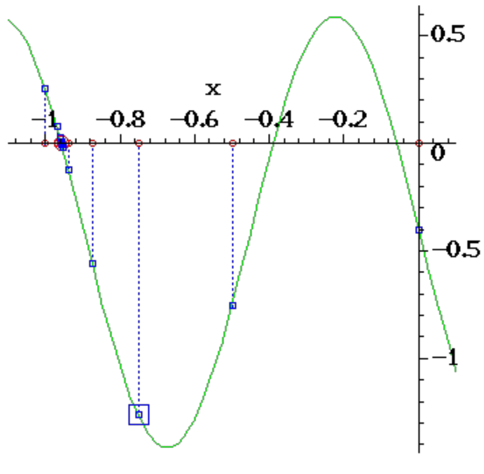
$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \qquad n=0,1,2,...$$

Terminamos las iteraciones cuando $|x_n - \alpha| < \epsilon$, o cuando $|f(x_n)| < \epsilon$, siendo ϵ la tolerancia con la cual se quiere calcular la raiz. Como en general no se conoce a priori el valor de α, en la práctica usaremos los criterios del error absoluto o error relativo: $|e_n| = |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$, o bien $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| < \epsilon$, respectivamente. Tiene orden de convergencia 1 (*lineal*) y constante de error asintótico 1/2 (ver tabla). Llamando $x_0=a$, $x_1=b$ para arrancar el proceso, las iteraciones sucesivas son:

MÉTODO DE BISECCIÓN					
k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\| / \|x_k\|$	$\|e_k\|$	$\|e_k\| / \|e_{k-1}\|$
0	-1.000000000000000	0.256986598718789	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.000000000000000	-0.400000000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
2	-0.500000000000000	-0.750783227689620	1.0000000000	0.5000000000	0.0000000000
3	-0.750000000000000	-1.258934493426592	0.3333333333	0.2500000000	0.5000000000
4	-0.875000000000000	-0.557526431008143	0.1428571429	0.1250000000	0.5000000000
5	-0.937500000000000	-0.124303034470839	0.0666666667	0.0625000000	0.5000000000
6	-0.968750000000000	0.077726250008440	0.0322580645	0.0312500000	0.5000000000
7	-0.953125000000000	-0.021023825885274	0.0163934426	0.0156250000	0.5000000000
8	-0.960937500000000	0.028992551069677	0.0081300813	0.0078125000	0.5000000000
9	-0.957031250000000	0.004135435304323	0.0040816327	0.0039062500	0.5000000000
10	-0.955078125000000	-0.008407597602118	0.0020449898	0.0019531250	0.5000000000
11	-0.956054687500000	-0.002126784869170	0.0010214505	0.0009765625	0.5000000000

12	-0.956542968750000	0.001006667597574	0.0005104645	0.0004882812	0.5000000000
13	-0.956298828125000	-0.000559475327431	0.0002552974	0.0002441406	0.5000000000
14	-0.956420898437500	0.000223742248126	0.0001276324	0.0001220703	0.5000000000
15	-0.956359863281250	-0.000167830047126	0.0000638203	0.0000610352	0.5000000000
16	-0.956390380859375	0.000027965228099	0.0000319091	0.0000305176	0.5000000000
17	-0.956375122070312	-0.000069930128172	0.0000159548	0.0000152588	0.5000000000
18	-0.956382751464844	-0.000020981879632	0.0000079773	0.0000076294	0.5000000000
19	-0.956386566162109	0.000003491816844	0.0000039887	0.0000038147	0.5000000000
20	-0.956384658813477	-0.000008744995742	0.0000019943	0.0000019073	0.5000000000
21	-0.956385612487793	-0.000002626580536	0.0000009972	0.0000009537	0.5000000000
22	-0.956386089324951	0.000000432620382	0.0000004986	0.0000004768	0.5000000000
23	-0.956385850906372	-0.000001096979520	0.0000002493	0.0000002384	0.5000000000
24	-0.956385970115662	-0.000000332179430	0.0000001246	0.0000001192	0.5000000000
25	-0.956386029720306	0.000000050220511	0.0000000623	0.0000000596	0.5000000000
26	-0.956385999917984	-0.000000140979451	0.0000000312	0.0000000298	0.5000000000
27	-0.956386014819145	-0.000000045379468	0.0000000156	0.0000000149	0.5000000000
28	-0.956386022269726	0.000000002420522	0.0000000078	0.0000000075	0.5000000000
29	-0.956386018544436	-0.000000021479473	0.0000000039	0.0000000037	0.5000000000
30	-0.956386020407081	-0.000000009529475	0.0000000019	0.0000000019	0.5000000000

La convergencia con la tolerancia pedida se produjo en la iteración: 13. A continuación aparecen la gráfica de la función, los diferentes puntos de la sucesión $\{x_n\}$ sobre el eje x con un pequeño círculo y los puntos correspondientes sobre la curva con un cuadrado, ambas sucesiones de puntos se van aproximando progresivamente a la solución. También aparecen la iteración pedida, dentro de un cuadrado algo mayor, y el punto donde se ha producido la convergencia, en un círculo rojo.
Sugerencia: asignar a cada uno de los puntos obtenidos el número de iteración que le corresponde, y seguir así gráficamente la convergencia del proceso.



(cc) Jesús García Quesada 2011