Tutorial de Análisis Numérico
Interpolación : El error en la interpolación polinómica

Jesús García Quesada
Departamento de Informática y Sistemas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 Campus de Tafira, España
Email : jgarcia@dis.ulpgc.es

2 de Octubre de 2000, v0.3

ULPGC

Informática

Página Web

Página de Inicio

Contenido

Volver

Pantalla completa

Cerrar

Salir

Índice General

1. ERROR DEL POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN

Teorema 1.1 (ERROR). *Sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$, $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subseteq I$, $x_i \neq x_j$ *para* $i \neq j$ *y supongamos que* f *es derivable* $n+1$ *veces en* I *con derivada continua* $\Longrightarrow \forall x \in I, \exists \xi_x \in$ *menor de los intervalos que contiene a los puntos* $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ *tal que :*

$$\boxed{E = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}$$

donde $p(x)$ *es el polinomio que interpola a* f *en* $\{x_i\}_{i=0}^{n}$.

Demostración. Si x es uno de los puntso x_k no hay nada que probar ya que ambos miembros se anulan para cualquier ξ.

Si x es un <u>valor fijo</u> diferente de los x_k, consideramos la función auxiliar $F = F(t)$ definida por :

$$F(t) = f(t) - p(t) - cL(t), \qquad \text{donde } c = \frac{f(x) - p(x)}{L(x)} \tag{1}$$

y donde estamos llamando $L(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Tenemos $F(x_k) = f(x_k) - p(x_k) - cL(x_k) = y_k - y_k - 0 = 0$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y también $F(x) = f(x) - p(x) - cL(x) = 0$, por definición de c.

La función F tiene entonces al menos $n + 2$ ceros distintos en el intervalo I. Por el teorema de Rolle, F' debe tener por lo menos $n + 1$ ceros en el menor de los intervalos que contiene a x y los x_k, la segunda derivada F'' debe tener no menos de n ceros, $\cdots$, la $(n+1)$-ésima derivada debe tener por lo menos un cero. Sea ξ_x tal cero. Derivando $(n+1)$ veces la ecuación (1) y haciendo $t = \xi_x$:

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - c(n+1)! \tag{2}$$

ya que la derivada $(n+1)$-ésima de $p(x)$ es cero. Por tanto, usando (2) tenemos :

$$cL(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) L(x)$$

$\square$

Ejemplo. ¿Cúal es el error máximo que puede presentarse con dos puntos de interpolación?

Solución: Supongamos dos puntos de interpolación $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$. Entonces el polinomio es :

$$p(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x_1 - x)f(x_0) + (x - x_0)f(x_1)}{x_1 - x_0}$$

y por otra parte :

$$E = f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(\xi_x)$$

Supongamos que $|f''(x)| \leqslant M$, $\forall x \in [x_0, x_1]$. El máximo de la función $|\frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1)|$ entre x_0 y x_1 se presenta en $x = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ con valor $\frac{1}{8}(x_1 - x_0)^2$. Por tanto:

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{(x_1 - x_0)^2}{8} M$$

Por ejemplo, si calculamos el valor de $\operatorname{sen} x$ por una tabla de senos con paso h usando la interpolación lineal, el error está acotado por el valor $h^2/8$ ya que $M = 1$ en éste caso. ■

Ejemplo. ¿Con qué grado de exactitud podemos calcular $\sqrt{115}$ mediante interpolación polinómica para la función $y = \sqrt{x}$ si elegimos los puntos $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$? ¿Y si se eligen $x_0 = 100, x_1 = 110, x_2 = 120$?

Solución: Tenemos $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\ y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$. Entonces :

$$M = \max_{x\in[100,144]} |y'''| = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8}10^{-5} \text{ para } 100 \leqslant x \leqslant 144 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |E| \leqslant \frac{3}{8}\times 10^{-5}\times\frac{1}{3!}|(115-100)(115-121)(115-144)| = \frac{1}{16}\times 10^{-5}\times 15\times 6\times 29 \simeq 1.6\times 10^{-3}$$

Sin embargo, si elegimos $x_0 = 100, x_1 = 110, x_2 = 120$ obtendríamos :

$$|E| \leqslant \frac{3}{8}\times 10^{-5}\times\frac{1}{3!}\times 15\times 5\times 5 \simeq 2.3\times 10^{-4}$$

.

■

2. ELECCIÓN ÓPTIMA DE LOS PUNTOS

Sabemos que la fórmula del error para la interpolación polinómica es

$$E = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

y nos interesa escoger los puntos de forma que se obtenga el mínimo error posible. Para lograr esto utilizaremos los polinomios de Tchebychev.

2.1. Polinomios de Tchebychev

Definición 1. *Se definen recursivamente como :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} T_0(x) & = & 1 \\ T_1(x) & = & x \\ T_n(x) & = & 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad \forall n \geqslant 2 \end{array}}$$

Ejemplo 1. *Los primeros polinomios de Tchebychev son :*

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x\,T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2x\,T_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 2x\,T_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad \textit{etc.} \end{aligned}$$

Se puede probar también que se verifica la siguiente relación que nos será útil para obtener las raíces de $T_n(x)$:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad \text{si} \quad x \in [-1, 1]$$

y por tanto

$$\left|T_n(x)\right| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Propiedad 1. *Se verifica que:*

$$\max \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \geqslant \frac{1}{2^n},$$

para cualquier elección posible de los x_i.

Propiedad 2. *Se verifica que :*

$$\max \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| = \frac{1}{2^n},$$

si los puntos x_i son las raíces del polinomio de Tchebychev T_{n+1} de grado $n+1$.

Para calcular las raíces de $T_n(x)$, usamso la relación vista antes :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$$

y recordando que $\cos x = 0 \iff x = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, tenemos que :

$$n \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow \arccos x = \frac{\pi + 2\pi k}{2n} = \frac{2k+1}{2n}\,\pi$$

O sea :

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\,\pi\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

que son las n raíces del polinomio $T_n(x)$.

Ejemplo. Para calcular $\sqrt{115}$ con tres puntos elegidos en el intervalo $[100, 200]$, si ahora elegimos los puntos x_i de forma que sean las raíces del polinomio de Tchebychev $T_3(x)$ tenemos que :

Solución:

$$x'_k = \cos\left(\frac{2k+1}{6}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$x'_0 = \cos\frac{\pi}{6} = 0.86602541, \quad x'_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad x'_2 = \cos\frac{5\pi}{6} = -0.86602541$

Ahora es necesario pasar al intervalo de interpolación las raíces obtenidas, ya que las raíces del polinomio de Tchebychev de grado n caen dentro del intervalo [-1,1], siendo simétricas dentro del mismo.

Por tanto, necesitamos construir una aplicación (biyectiva) que nos transforme el intervalo [-1,1] en el intervalo [100,120] (en general al intervalo $[\min\{x_i\}, \max\{x_i\}]$)

Construimos $f\colon [-1, 1] \to [100, 120]$ de forma que $f(-1) = 100$ y $f(1) = 120$, pero esto no es sino un problema de interpolación que podemos resolver con la fórmula de Newton en diferencias divididas :

$$\begin{array}{llll} x_0 = -1 \longrightarrow & y_0 = 100 \searrow & & \\ & & f[x_0, x_1] = \frac{120-100}{1+1} = 10 & \\ x_1 = +1 \longrightarrow & y_1 = 120 \nearrow & & \end{array}$$

ULPGC

Informática

Página Web

Página de Inicio

Contenido

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Página 8 de 21

Volver

Pantalla completa

Cerrar

Salir

con lo cual el polinomio de interpolación es $p(x) = 100 + 10(x+1) = 10x + 110$ y los valores correspondientes en el intervalo [100,120] de los x'_k obtenidos son :

$x_0 = p(x'_0) = 10x'_0 + 110 = 118.66025404$, $x_1 = p(x'_1) = 110$, $x_2 = p(x'_2) = 101.33974596$

y el error de interpolación en éste caso es :

$$|E| \leqslant \frac{3}{8} \times 10^{-5} \times \frac{1}{3!} \ |(115 - x_0)(115 - x_1)(115 - x_2)| \simeq 6.47208691 \times 10^{-5}$$

que sería el menor error que se podría cometer utilizando interpolación polinómica al calcular $\sqrt{115}$ en el intervalo [100,120] con tres puntos de interpolación. ■

3. PROBLEMAS

Problema 1.

Suponga que dispone de una tabla de logaritmos neperianos para valores enteros positivos x, y que calcula $\ln 11.1$ por interpolación cuadrática en $x_0 = 10,\ x_1 = 11,\ x_2 = 12$. Estimar el error cometido.

Problema 2.

Sea la función $f(x) = \ln(2 + x),\ -1 \leqslant x \leqslant 1$ que es aproximada por un polinomio de interpolación p_n de grado n en los puntos de Tchebychev $x_k = \cos(\frac{2k+1}{2n+2}), k = 0, 1, \ldots, n$. Obtener una cota para el error:

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - p_n(x)|$$

Problema 3. Si $e^{0.2}$ se estima por interpolación con los valores $e^0 = 1,\ e^{0.1} = 1.1052$ y $e^{0.3} = 1.3499$, encontrar las estimaciones máxima y mínima del error. Comparar con el valor real.

Problema 4. Calcular el error al estimar $f(0.15)$ usando los puntos

x	-0.2	0.5	0.1	0.7	0.0
f(x)	1.3940	1.0025	1.1221	1.0084	1.1884

para cada uno de los siguientes casos, sabiendo que $f(0.15) = 1.0956$ y que la función es:

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x+1)}$$

¿Coinciden los errores reales con sus estimaciones?

(a) el polinomio de grado dos obtenido con los tres primeros puntos

(b) el polinomio de grado dos obtenido con los tres últimos puntos

(c) el polinomio de grado tres obtenido con los cuatro primeros puntos

(d) el polinomio de grado tres obtenido con los cuatro últimos puntos

(e) el polinomio de grado cuatro

Referencias

[Act90] F.S. Acton. *Numerical Methods That (Usually) Work*. The Mathematical Association of America, Washington, 1990.

[Atk89] K. E. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley, New York, 2nd. edition, 1989.

[BF80] R.L. Burden and D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1980.

[CC89] S.C. Chapra and R.P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill International, New York, second edition, 1989.

[CdB80] S. D. Conte and C. de Boor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw–Hill, New York, third edition, 1980.

[DB74] Germund Dahlquist and Åke Björck. *Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[Fad59] V.N. Faddeeva. *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover Publications, Inc, New York, 1959.

[Frö79] C.-E. Fröberg. *Introduction to Numerical Analysis*. Adison–Wesley, Reading, Massachusetts, 2nd. edition, 1979.

[GW89] C.F. Gerald and P.O. Wheatley. *Applied Numerical Analysis*. Addison–Wesley Publishing Co., Reading, Massachusets, fourth edition, 1989.

[Hen72] P. Henrici. *Elementos de Análisis Numérico*. Ed. Trillas, México, 1972.

[Hil74] F. B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw–Hill, New York, second edition, 1974.

[KC94] D. Kincaid and W. Cheney. *Análisis Numérico : las matemáticas del cálculo científico*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.

[Mar87] M. J. Maron. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Macmillan Publishing Co., New York, second edition, 1987.

[ML91] M. J. Maron and R. J. Lopez. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Wadsworth, Belmont, California, third edition, 1991.

[RR78] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz. *A First Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 2nd. edition, 1978.

[Sch89] H.R. Schwarz. *Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[Wer84] W. Werner. *Mathematics of Computation*, 43:205–217, 1984.

[YG73a] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume I. Dover Publications, New York, 1973.

[YG73b] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume II. Dover Publications, New York, 1973.

Soluciones a los Problemas

Problema 1. Solución: Con unos sencillos cálculos se obtiene 0.000033.

Problema 2. Solución:

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)\, 2^n}$$

Problema 3. El valor que se obtiene es 1.2218, con un error real de -0.0004, siendo las estimaciones del error -0.00033 la mínima y -0.00045 la máxima.

Repetir ahora el ejercicio usando extrapolación para obtener $e^{0.4}$.

Problema 4(a) 1.0919

Problema 4(b) 1.0973

Problema 4(c) 1.0941

□

Problema 4(d) 1.0951

Problema 4(e) 1.0920.

□