# Tutorial de Análisis Numérico
# Interpolación : Fórmula de Lagrange

Jesús García Quesada
Departamento de Informática y Sistemas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 Campus de Tafira, España
Email : jgarcia@dis.ulpgc.es

2 de Octubre de 2000, v0.3



# Índice General

# 1. FÓRMULA DE LAGRANGE

Supongamos que $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} = \{x_i\}_{i=0}^n$ son $n+1$ puntos distintos del eje real y que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida sobre $I = [a, b]$ con $\{x_i\}_{i=0}^n \subseteq [a, b]$. Tenemos entonces :

**Teorema 1.1.** *Existe un único polinomio $p(x)$ de grado no mayor que $n$ que interpola a $f$ en los puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ :*

$$p(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \cdots, \ldots, \ldots, n$$

*Unicidad.* Sea $q(x)$ otro polinomio de grado menor o igual que $n$ que interpola a $f$ en $\{x_i\}_{i=0}^n$. Entonces :

$$h(x) = p(x) - q(x)$$

es un polinomio de grado menor o igual que $n$ que cumple

$$h(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

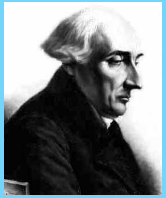
o sea, $h(x)$ tiene al menos $n+1$ ceros distintos $\Longrightarrow h(x) = 0$ (idénticamente nulo) $\Longrightarrow p(x) = q(x), \quad \forall x.$ □

*Existencia.* Veamos ahora como se puede construir; escribiremos por brevedad

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

En primer lugar, construiremos un polinomio de grado $n$ que sea nulo en todos los puntos $x_i$ salvo en uno $x_k$ en el cual valga 1. Tiene que ser de la forma :





$$L_k(x) = a \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i), \quad \text{siendo } a \in \mathbb{R}$$

y como su valor para $x = x_k$ debe ser 1 tenemos :

$$a = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)}$$

con lo que queda :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

verificándose entonces que

$$L_k(x_i) = \delta_{ki}(\text{delta de Kronecker }) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } i = k, \\ 0\,, & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

y esto para $i = 0, 1, \ldots, n$, dentro de cada $k = 0, 1, \ldots, n$.

Por tanto, si se desea un polinomio de grado $n$ que tome respectivamente los valores $y_0, y_1, \cdots, y_n$ en los puntos $x_0, x_1, \cdots, x_n$ basta tomar :

$$
\begin{aligned}
p(x) = {} & y_0\, L_0(x) + y_1\, L_{(}x) + \cdots + y_n\, L_n(x) = \\
& = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \\
& = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \\
& + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \cdots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}
$$

que se denomina **fórmula de Lagrange** del polinomio de interpolación. □

Efectivamente ocurre que :

$$
p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k\, L_k(x_i) = 0 + \cdots \overset{\mathbf{i}}{\smile} + 0 + y_i\,.1 + 0 + \cdots \overset{\mathbf{n-i}}{\smile} + 0 = y_i
$$

y esto para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, con lo cual verifica las condiciones a cumplir por el polinomio que interpola en los puntos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$.

**Ejemplo.** Encontrar el polinomio de interpolación $p(x)$ de segundo grado tal que $p(0) = -1$, $p(1) = 2, p(2) = 7$.

*Solución*:

Tomando las $x_i$ e $y_i$ en el orden dado: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; $y_0 = -1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 7$
Por la fórmula de Lagrange tenemos :

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2},\\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -x(x-2),\\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x-1)}{2}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $p(x)$ viene dado por la siguiente fórmula :

$$p(x) = y_0\, L_0(x) + y_1\, L_1(x) + y_2\, L_2(x) = -L_0(x) + 2\, L_1(x) + 7\, L_2(x) = x^2 + 2x - 1$$

■

En general no se nos pide la expresión explícita del polinomio de interpolación como en el ejemplo anterior, sino **el valor de ese polinomio** en uno o varios puntos en los que se quiere interpolar, como es el caso del siguiente ejemplo.

**Ejemplo.** Obtener por interpolación el valor para $x = 3$ conocidos los valores $x_0 = 0, y_0 = -1$; $x_1 = 1, y_1 = 0$; $x_2 = 2, y_2 = 7$; $x_3 = 4, y_3 = 63$.

*Solución*:

Por la fórmula de Lagrange tenemos, sustituyendo ya el valor $x = 3$ :

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}\Longrightarrow L_0(3)=\frac{(3-1)(3-2)(3-4)}{-8}=\frac{2.1.(-1)}{-8}=\frac{1}{4}$$

$$L_1(x)=\frac{x(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}\Longrightarrow L_1(3)=\frac{3.1.(-1)}{1.(-1).(-3)}=-1$$

$$L_2(x)=\frac{x(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}\Longrightarrow L_2(3)=\frac{3.2.(-1)}{2.(1).(-2)}=\frac{3}{2}$$

$$L_3(x)=\frac{x(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}\Longrightarrow L_3(3)=\frac{3.2.1}{4.3.2}=\frac{1}{4}$$

Entonces

$$p(3)=y_0\,L_0(3)+y_1\,L_1(3)+y_2\,L_2(3)+y_3\,L_3(3)=(-1).\frac{1}{4}+0.(-1)+7.\frac{3}{2}+63.\frac{1}{4}=$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{21}{2}+\frac{63}{4}=26$$

que es lo que tiene que dar ya que los valores dados son de la función $f(x)=x^3-1$. Obsérvese que podríamos habernos ahorrado el cálculo de $L_1(x)$ ya que $y_1=0$ y el resultado del sumando siempre será cero.

## 2. TEST

A continuación vienen algunas preguntas tipo test para probar la comprensión de la teoría expuesta. Por favor, lea cuidadosamente el texto y las posibles respuestas que aparecen.

Inicio del Test Responder a las siguientes cuestiones.

**1.** Si $x_i = 1, 2, 3$ e $y_i = 4, 5, 6$ entonces $L_1(0) + L_0(1)$ vale
☐ $-2$ ☐ $4$ ☐ $3$ ☐ $0$

**2.** El polinomio $L_k(x)$ ¿qué grado tiene?
☐ $2n$ ☐ $n$ ☐ $n-1$ ☐ $n+1$

**3.** El polinomio $p(x)$ es la suma de $n+1$ polinomios $\Longrightarrow$ el grado de $p(x)$ es
☐ $n$ como mínimo ☐ $n$ siempre ☐ $n-1$ siempre ☐ n como máximo

**4.** En el cálculo de $L_k(x)$ para un cierto $x$ fijo, ¿cuantas sumas/restas son necesarias?
☐ $n^2$ ☐ $2(n+1)$ ☐ $2n$ ☐ $2n-1$

**5.** ¿Y cuantas multiplicaciones/divisiones son necesarias?
☐ $n^2$ ☐ $2(n+1)$ ☐ $2n$ ☐ $2n-1$

**6.** Dado que hay que calcular $n+1$ polinomios $L_k(x)$ para obtener $p(x)$, el número total de sumas/restas para calcular $p(x)$ será de
☐ $2n(n+1)$ ☐ $2(n^2+1)$ ☐ $2n^2+3n$ ☐ $2n^2-1$

Final del Test Puntos: Correctas



**Test.** Solucionar un problema de interpolación por el método de Lagrange tiene un coste de cálculo menor que si se hiciera por el método de los coeficientes indeterminados

(a) Verdadero (b) Falso

**Test.** Supongamos que se ha realizado una interpolación considerando los puntos $x,y_i, 0 \leqslant i \leqslant n$ y ahora se quiere añadir un nuevo nodo $x_{n+1}, y_{n+1}$ ¿se pueden aprovechar los $L_k(x)$ calculados anteriormente o hay que rehacer todos los cálculos?

(a) Se pueden aprovechar (b) Hay que rehacerlos



# 3. PROBLEMAS

**Problema 1.** Dada la siguiente tabla de valores:

| $\mathbf{x_i}$ | 0 | 1 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{y_i}$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |

obtener por interpolación los valores para $x = 2, 3, 5$

**Problema 2.** Obtener el polinomio de interpolación que resulta de la tabla de valores:

| $\mathbf{x_i}$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{y_i}$ | 1 | 1 | 2 | 5 |

**Problema 3.** ¿cuantas operaciones aritméticas elementales supone la evaluación del polinomio de interpolación en un punto $x$ por la fórmula de Lagrange ?

**Problema 4.** Partiendo de la fórmula de interpolación de Lagrange y definiendo

$$\lambda_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(x_i - x_j)} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}; \quad \mu_i = \frac{\lambda_i}{x - x_i}, \ i = 0, 1, \ldots, n$$

demostrar que si $x$ no es un nodo, entonces el polinomio de interpolación se puede calcular mediante la fórmula :

$$p(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i y_i}{\sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i}$$

que se denomina **fórmula baricéntrica** del proceso de interpolación de Lagrange.



# 4. ALGORITMO

El siguiente algoritmo realiza el cálculo del valor del polinomio en el punto $z$ en el que se quiere interpolar.

---

**Algoritmo 4.1:** LAGRANGE$(x, y, n, z)$

---

**Comentario:** Las abcisas $x_i$ se suponen diferentes, $0 \leqslant i \leqslant n$

**ENTRADA:** Número de elementos $n$, vectores $x_i, y_i$, y punto $z$

**SALIDA:** Valor del polinomio en el punto $z$

**local** $i, j, l$
$valor \leftarrow 0$
**para** $i \leftarrow 0$ **hasta** $n$
  **hacer** {
    $l \leftarrow y_i$
    **para** $j \leftarrow 0$ **hasta** $n$
      **hacer** {
        **si** $(i \neq j)$
          **entonces** $l \leftarrow l * (z - x_j)/(x_i - x_j)$
        **fin si**
    **fin para**
    $valor \leftarrow valor + l$
**fin para**
**devolver** $(valor)$

---



# Referencias


[Act90] F.S. Acton. *Numerical Methods That (Usually) Work*. The Mathematical Association of America, Washington, 1990.

[Atk89] K. E. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley, New York, 2nd. edition, 1989.

[BF80] R.L. Burden and D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1980.

[CC89] S.C. Chapra and R.P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill International, New York, second edition, 1989.

[CdB80] S. D. Conte and C. de Boor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw–Hill, New York, third edition, 1980.

[DB74] Germund Dahlquist and Åke Björck. *Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[Fad59] V.N. Faddeeva. *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover Publications, Inc, New York, 1959.

[Frö79] C.-E. Fröberg. *Introduction to Numerical Analysis*. Adison–Wesley, Reading, Massachusetts, 2nd. edition, 1979.

[GW89] C.F. Gerald and P.O. Wheatley. *Applied Numerical Analysis*. Addison–Wesley Publishing Co., Reading, Massachusets, fourth edition, 1989.




[Hen72] P. Henrici. *Elementos de Análisis Numérico*. Ed. Trillas, México, 1972.

[Hil74] F. B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw–Hill, New York, second edition, 1974.

[KC94] D. Kincaid and W. Cheney. *Análisis Numérico : las matemáticas del cálculo científico*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.

[Mar87] M. J. Maron. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Macmillan Publishing Co., New York, second edition, 1987.

[ML91] M. J. Maron and R. J. Lopez. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Wadsworth, Belmont, California, third edition, 1991.

[RR78] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz. *A First Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 2nd. edition, 1978.

[Sch89] H.R. Schwarz. *Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[Wer84] W. Werner. *Mathematics of Computation*, 43:205–217, 1984.

[YG73a] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume I. Dover Publications, New York, 1973.

[YG73b] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume II. Dover Publications, New York, 1973.




# Soluciones a los Problemas

**Problema 1.** Los valores para $x = 2, 3, 5$ son respectivamente $-1, 0, 1$.

**Problema 2.** El polinomio resultante es $p(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$.



**Problema 3.** Probar que es una fórmula de $O(n^2)$. La mayor parte del problema ya se ha realizado al responder el test de la sección anterior.



**Problema 4.**

Sabemos que

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{1}{x - x_i} \left( \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \right) \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \tag{1}$$

y por otra parte

$$\lambda_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(x_i - x_j)} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}, \ \ i = 0, 1, \ldots, n \tag{2}$$

que depende solo de las abcisas $x_k$, y además

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{x - x_i}, \ \ i = 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

que depende del valor $x$. Con estas definiciones, ( 1) se puede escribir en la forma

$$p(x) = \left( \sum_{i=0}^{n} \mu_i \, y_i \right) \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \tag{4}$$

Esta última forma ( 4) es válida para cualquier valor de los $y_i$, en particular cuando $y_i = 1$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Para estos valores de la función la única solución posible es

$p(x) = 1$ por el teorema 1.1. Por tanto, aplicando ( 4)

$$1 = \left( \sum_{i=0}^{n} \mu_i \right) \prod_{k=0}^{n} (x - x_k), \quad \forall x \Longrightarrow \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i} \tag{5}$$

A partir entonces de ( 4) y ( 5) deducimos

$$p(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i \, y_i}{\sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i}$$

que se denomina fórmula baricéntrica de la interpolación de Lagrange ya que está formada como una media ponderada de los valores de la función $y_i$ con los pesos $\mu_i$.

Esta fórmula es de una extraordinaria importancia, ya que nos permite añadir nuevos nodos con comodidad, al poder reutilizar los cálculos que se realizaron antes de disponer del nuevo nodo. Ver [Sch89], o también [KC94].



# Soluciones a los Tests

**Solución al Test:** El método de Lagrange tiene un coste de $O(n^2)$ operaciones según se ve en este mismo tutorial, mientras que los algoritmos de resolución de un sistema lineal tienen un coste de $O(n^3)$ operaciones. Final del Test



**Solución al Test:** Obsérvese que en el cálculo de cada sumando $L_k(x)$ intervienen un factor más en el numerador y en el denominador, y además aparece el nuevo sumando $L_{n+1}(x)$. Una solución sería almacenar los $L_k(x)$ y actualizalrlos con cada nuevo nodo, además de añadir el nuevo, pero no es una solución eficiente. Una solución más brillante es la aportada por la fórmula baricéntrica (ver Problema 4). Final del Test