Tutorial de Análisis Numérico
Interpolación : Fórmulas de Newton en diferencias finitas

Jesús García Quesada
Departamento de Informática y Sistemas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
35017 Campus de Tafira, España
Email : jgarcia@dis.ulpgc.es

2 de Octubre de 2000, v0.3

Índice General

1. NEWTON EN DIFERENCIAS FINITAS

En el caso particular de que las abcisas de los nodos de interpolación *sean equidistantes* la expresión del polinomio de interpolación de Newton en diferencias divididas adopta otras formas que se han usado mucho, la *fórmula en diferencias progresivas* y la *fórmula en diferencias regresivas.* Antes de desarrollarlas necesitamos de algunas definiciones previas.

Dado un conjunto de puntos $(x_i, y_i), 0 \leqslant i \leqslant n$ donde $y_i = f(x_i)$ se define **diferencia progresiva** de orden 1 en y_k y se denota por Δy_k a

$$\Delta y_k = f(x_k + h) - f(x_k) = f(x_{k+1} - f(x_k) = y_{k+1} - y_k = \Delta^1 y_k$$

y **diferencia regresiva** de orden 1 en y_k y se denota por ∇y_k a

$$\nabla y_k = y_k - y_{k-1} = \nabla^1 y_k$$

Análogamente, se define diferencia progresiva de orden 2 en y_k a

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_k &= \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = \\ &= y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = \nabla^2 y_{k+2} \end{aligned}$$

En general se definen

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \Delta^m y_k & \stackrel{(def)}{=} & \Delta(\Delta^{m-1} y_k) \\ \nabla^m y_k & \stackrel{(def)}{=} & \nabla(\nabla^{m-1} y_k) \end{array}}$$

y convenimos en que $\Delta^0 y_k = y_k, \nabla^0 y_k = y_k$ y ocurre además que $\Delta^m y_k = \nabla^m y_{k+m}$ y también

$$\Delta^n y_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} y_{k+n-j}$$

En la tabla 1 aparece como se forman las diferencias de diferentes ordenes. Observe la regularidad de la **diagonal superior**.

De la misma forma, en la tabla 2 aparecen las mismas diferencias que se calcularon en la tabla de dif. progresivas, pero ahora con la notación propia de las diferencias regresivas. Observe la regularidad de la **diagonal inferior**.

Necesitamos ahora establecer una relación entre diferencias divididas y diferencias finitas para poder reescribir la fórmula de Newton en términos de diferencias progresivas o regresivas. Dicha relación nos viene dada por el siguiente lema.

Lema 1.1.

$$\forall i \geqslant 0 : \qquad f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] = \frac{\Delta^i y_k}{i!\, h^i}$$

Demostración. Por inducción tenemos :

- Lo demostramos para $i = 0 : f[x_k] = f(x_k) = y_k = \Delta^0 y_k$
- Lo suponemos cierto para $i = n \geqslant 0$. Y entonces
- Lo demostramos para $i = n + 1$. Tenemos

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	Δ^4 y	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	$\Delta^8 y$
x_0	y_0								
		Δy_0							
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$						
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$					
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$				
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$		$\Delta^6 y_0$		
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		$\Delta^5 y_1$		$\Delta^7 y_0$	
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$		$\Delta^6 y_1$		$\Delta^8 y_0$
		Δy_4		$\Delta^3 y_3$		$\Delta^5 y_2$		$\Delta^7 y_1$	
x_5	y_5		$\Delta^2 y_4$		$\Delta^4 y_3$		$\Delta^6 y_2$		
		Δy_5		$\Delta^3 y_4$		$\Delta^5 y_3$			
x_6	y_6		$\Delta^2 y_5$		$\Delta^4 y_4$				
		Δy_6		$\Delta^3 y_5$					
x_7	y_7		$\Delta^2 y_6$						
		Δy_7							
x_8	y_8								

Tabla 1: Tabla de diferencias progresivas

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$	∇^4 y	$\nabla^5 y$	$\nabla^6 y$	$\nabla^7 y$	$\nabla^8 y$
x_0	y_0								
		∇y_1							
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$						
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$					
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$				
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$		$\nabla^5 y_5$			
x_3	y_3		$\nabla^2 y_2$		$\nabla^4 y_1$		$\nabla^6 y_0$		
		∇y_4		$\nabla^3 y_5$		$\nabla^5 y_6$		$\nabla^7 y_7$	
x_4	y_4		$\nabla^2 y_5$		$\nabla^4 y_6$		$\nabla^6 y_7$		$\nabla^8 y_8$
		∇y_5		$\nabla^3 y_6$		$\nabla^5 y_7$		$\nabla^7 y_8$	
x_5	y_5		$\nabla^2 y_6$		$\nabla^4 y_7$		$\nabla^6 y_8$		
		∇y_6		$\nabla^3 y_7$		$\nabla^5 y_8$			
x_6	y_6		$\nabla^2 y_7$		$\nabla^4 y_8$				
		∇y_7		$\nabla^3 y_8$					
x_7	y_7		$\nabla^2 y_8$						
		∇y_8							
x_8	y_8								

Tabla 2: Tabla de diferencias regresivas

$$
\begin{aligned}
f[x_k, \cdots, x_{k+n+1}] &= \frac{f[x_k, \cdots, x_{k+n}] - f[x_{k+1}, \cdots, x_{k+n+1}]}{x_k - x_{k+n+1}} = \\
&= \frac{\Delta^n y_k / n! h^n - \Delta^n y_{k+1} / n! h^n}{-(n+1)h} = \frac{\Delta^n y_{k+1} - \Delta^n y_k}{(n+1)!\, h^{n+1}} = \\
&= \frac{\Delta^n (y_{k+1} - y_k)}{(n+1)!\, h^{n+1}} = \frac{\Delta^n (\Delta y_k)}{(n+1)!\, h^{n+1}} = \frac{\Delta^{n+1} y_k}{(n+1)!\, h^{n+1}}
\end{aligned}
$$

$\square$

1.1. NEWTON EN DIFERENCIAS PROGRESIVAS

Utilizando éste lema podemos entonces obtener la fórmula de Newton en diferencias progresivas, que es la misma que en diferencias divididas pero expresada en diferencias finitas, que es posible si en los puntos de interpolación las **abcisas son equidistantes**, o sea, si

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n-1$$

siendo h la diferencia constante entre dos abcisas consecutivas.

Tenemos entonces los puntos de interpolación $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, donde $y_i = f(x_i)$ y además $x_{i+1} = x_i + h, \forall i = 0, 1, \ldots, n-1$ y podemos escribir $x_1 = x_0 + h \Longrightarrow x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h \Longrightarrow x_3 = x_0 + 3h \Longrightarrow \ldots$ $\boxed{x_i = x_0 + i\,h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n}$

La expresión del polinomio de interpolación en diferencias divididas es

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

Aplicando el lema anterior a ésta fórmula obtenemos :

$$\begin{aligned} p_n(x) = y_0 + \frac{\Delta^1 y_0}{1!\,h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2}$$

por otra parte, hacemos el cambio :

$$\frac{x-x_0}{h} = s \Longrightarrow \frac{x-x_i}{h} = \frac{x-(x_0+i\,h)}{h} = \frac{x-x_0-i\,h}{h} = \frac{x-x_0}{h} - \frac{i\,h}{h} = s-i \qquad (3)$$

y sustituyendo en (2) :

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \overbrace{y_0}^{\Delta^0 y_0} + \Delta^1 y_0\,\frac{(x-x_0)}{h} + \Delta^2 y_0\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\,h^2} + \cdots \\ &\quad + \Delta^n y_0\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!\,h^n} = \\ &= y_0 + \Delta^1 y_0\,\overbrace{s}^{\binom{s}{1}} + \Delta^2 y_0\,\overbrace{\frac{s(s-1)}{2!}}^{\binom{s}{2}} + \cdots \qquad (4) \\ &\quad + \Delta^n y_0\,\overbrace{\frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}}^{\binom{s}{n}} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \Delta^k y_0\,\frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k y_0 \binom{s}{k} \end{aligned}$$

con lo cual tenemos :

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\,\Delta^k y_0}$$

que se conoce con el nombre de **fórmula de Newton en diferencias finitas progresivas**.

Ejemplo. Obtener una fórmula para la suma de los primeros números naturales.

Solución:

Sabemos que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ y como queremos obtenerla por interpolación con abcisas equidistantes construimos un conjunto de valores según los diferentes valores de n:

n	$\sum$	**y**	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
$1 \longrightarrow$	1	$\mathbf{1}$				
			$\mathbf{2}$			
$2 \longrightarrow$	$1+2$	3		$\mathbf{1}$		
			3		$\mathbf{0}$	
$3 \longrightarrow$	$1+2+3$	6		1		$\mathbf{0}$
			4		0	
$4 \longrightarrow$	$1+2+3+4=$	10		1		
			5			
$1 \longrightarrow$	$1+2+3+4+5=$	15				

Tenemos $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k y_0$
con $s = (x - x_0)/h = x - 1$ con lo que

$$\begin{aligned} p(x) =& 1 + 2(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)(x-2) = \frac{x^2 - 3x + 2 + 4x - 2}{2} = \\ =& \frac{x^2 + x}{2} = \frac{x(x+1)}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

que es lo que debíamos obtener. $\blacksquare$

1.2. NEWTON EN DIFERENCIAS REGRESIVAS

También en éste caso las **abcisas son equidistantes**, o sea

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n-1$$

siendo h la diferencia constante entre dos abcisas consecutivas.

Tenemos entonces los puntos de interpolación $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, donde $y_i = f(x_i)$ y además $x_{i+1} = x_i + h, \forall i = 0, 1, \ldots, n-1$ y podemos escribir $x_1 = x_0 + h \Longrightarrow x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h \Longrightarrow x_3 = x_0 + 3h \Longrightarrow \ldots$ $\boxed{x_i = x_0 + i\,h, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n}$

Consideramos ahora los puntos de interpolación en el orden $(x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), \ldots, (x_0, y_o)$ y para éste orden la expresión del polinomio de interpolación en diferencias divididas es

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_n] &+ f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots \\ &+ f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) \end{aligned} \tag{6}$$

Aplicando el lema anterior 1.1 a ésta última fórmula y considerando la relación entre diferencias progresivas y regresivas obtenemos :

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k y_i}{k!\, h^k} \quad = \frac{\nabla^k y_{i+k}}{k!\, h^k}$$

Considerando además que la diferencia dividida es una función simétrica de sus argumentos, o sea, que

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}]$$

para cualquier permutación posible $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ de $(0, 1, \ldots, k)$ tendríamos por ejemplo que

$f[x_n, x_{n-1}] = f[x_{n-1}, x_n]$, $f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$, etc.

Sustituyendo entonces en la ecuación anterior (6):

$$\begin{aligned} p_n(x) = y_n + \frac{\nabla^1 y_n}{1!\, h^1}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2!\, h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots \\ + \frac{\nabla^n y_n}{n!\, h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) \end{aligned} \tag{7}$$

por otra parte, hacemos el cambio :

$$\frac{x - x_n}{h} = u \Longrightarrow \begin{array}{l} \frac{x-x_{n-1}}{h} = \frac{x-(x_n-h)}{h} = \frac{x-x_n+\,h}{h} = \frac{x-x_n}{h} + \frac{h}{h} = u + 1 \\ \frac{x-x_{n-2}}{h} = \frac{x-(x_n-2h)}{h} = \frac{x-x_n+2\,h}{h} = \frac{x-x_n}{h} + \frac{2\,h}{h} = u + 2 \\ \frac{x-x_i}{h} = \frac{x-(x_n-(n-i)\,h)}{h} = \frac{x-x_n+n-i\,h}{h} = \frac{x-x_n}{h} + \frac{n-i\,h}{h} = u + n - i \end{array}$$

y sustituyendo en (7) :

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = \overbrace{y_n}^{\nabla^0 y_n} + \nabla^1 y_n \, \frac{(x-x_n)}{h} + \nabla^2 y_n \, \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{2!\,h^2} + \cdots \\
+ \nabla^n y_n \, \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)}{n!\,h^n} = \\
= y_n + \nabla^1 y_n \, \overbrace{u}^{\binom{u}{1}} + \nabla^2 y_n \, \overbrace{\frac{u(u+1)}{2!}}^{\binom{u+1}{2}} + \cdots \\
+ \nabla^n y_n \, \overbrace{\frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{n!}}^{\binom{u+n-1}{n}} = \\
= \sum_{k=0}^{n} \nabla^k y_n \, \frac{u(u+1)\ldots(u+k-1)}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \nabla^k y_n \binom{u+k-1}{k}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

con lo cual tenemos :

$$
\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{u+k-1}{k} \nabla^k y_n}
$$

que se conoce con el nombre de **fórmula de Newton en diferencias regresivas**.

Ejemplo. Obtener una fórmula para la suma de los primeros números naturales.

Solución:

La tabla *es exactamente la misma* que se construyó para diferencias progresivas, pero se toma ahora la diagonal inferior, que aparece en negrita

n	$\sum$	**y**	∇^1	∇^2	∇^3	∇^4
$1 \longrightarrow$	$1 =$	1				
			2			
$2 \longrightarrow$	$1+2=$	3		1		
			3		0	
$3 \longrightarrow$	$1+2+3=$	6		1		**0**
			4		**0**	
$4 \longrightarrow$	$1+2+3+4=$	10		**1**		
			5			
$5 \longrightarrow$	$1+2+3+4+5=$	**15**				

Ahora la ecuación es: $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{u+k-1}{k} \nabla^k y_n$
siendo

$$u = \frac{x - x_n}{h} = x - 5, \quad h = 1$$

$$\begin{aligned} p(x) &= y_n + u\nabla y_n + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 y_n = \\ &= 15 + 5(x-5) + \frac{1}{2!}(x-5)(x-4) = \frac{x^2 - 9x + 20 + 10x - 20}{2} = \\ &= \frac{x^2 + x}{2} = \frac{x(x+1)}{2} \end{aligned}$$

que es de nuevo lo que debíamos obtener.

Ejemplo. Encontrar el polinomio de interpolación $p(x)$ de segundo grado tal que $p(0) = -1$, $p(1) = 2, p(2) = 7$.

Solución:

Tomando las x_i e y_i en el orden dado: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; $y_0 = -1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 7$
Construimos la tabla de diferencias finitas:

x	**y**	Δ^1/∇^1	Δ^2/∇^2
0	$-\mathbf{1}$		
		3	
1	2		**2**
		5	
2	**7**		

Para aplicar la fórmula en diferencias progresivas es $s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{x-0}{1} = x$ y por tanto:

$$p(x) = -1 + 3x + \frac{2}{2!}x(x-1) = x^2 - x + 3x - 1 = x^2 + 2x - 1$$

Análogamente, para aplicar la fórmula en diferencias regresivas es $u = \frac{x-x_n}{h} = \frac{x-2}{1} = x - 2$ y entonces:

$$p(x) = 7 + 5(x-2) + \frac{2}{2!}(x-2)(x-1) = 7 + 5x - 10 + x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2x - 1$$

2. PROBLEMAS

Problema 1. Construir la tabla de diferencias finitas para el conjunto de nodos siguiente:

x	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750
f(x)	0.79168	0.77334	0.74371	0.70413	0.65632	0.60228

Usar la fórmula progresiva de Newton con polinomios de grado tres para estimar $f(0.158)$ y $f(0.636)$. Para el primer polinomio, elegir $x_0 = 0.125$ y para el segundo $x_0 = 0.375$.

Problema 2. Con los mismos datos del problema 1, usar la fórmula regresiva de Newton, eligiendo $x_n = 0.500$ en el primer caso y $x_n = 0.750$ en el segundo polinomio ¿se obtienen los mismos resultados?

Problema 3. Con los mismos datos del problema 1, obtener los polinomios que interpolan en las abcisas $0.500, 0.625$ y 0.750, usando las fórmulas progresiva y regresiva de Newton. Demostrar que se trata del mismo polinomio.

PROBLEMA 4. Probar que:

(a)
$$\Delta[f(x).g(x)] = f(x).\Delta g(x) + g(x+h).\Delta f(x)$$

(b) $\Delta^n x^n = \nabla^n x^n = n!$ cuando $h = 1$.

(c)
$$\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x).\Delta f(x) - f(x).\Delta g(x)}{g(x+h).g(x)}$$

Referencias

[Act90] F.S. Acton. *Numerical Methods That (Usually) Work*. The Mathematical Association of America, Washington, 1990.

[Atk89] K. E. Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley, New York, 2nd. edition, 1989.

[BF80] R.L. Burden and D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1980.

[CC89] S.C. Chapra and R.P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill International, New York, second edition, 1989.

[CdB80] S. D. Conte and C. de Boor. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw–Hill, New York, third edition, 1980.

[DB74] Germund Dahlquist and Åke Björck. *Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[Fad59] V.N. Faddeeva. *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover Publications, Inc, New York, 1959.

[Frö79] C.-E. Fröberg. *Introduction to Numerical Analysis*. Adison–Wesley, Reading, Massachusetts, 2nd. edition, 1979.

[GW89] C.F. Gerald and P.O. Wheatley. *Applied Numerical Analysis*. Addison–Wesley Publishing Co., Reading, Massachusets, fourth edition, 1989.

[Hen72] P. Henrici. *Elementos de Análisis Numérico*. Ed. Trillas, México, 1972.

[Hil74] F. B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw–Hill, New York, second edition, 1974.

[KC94] D. Kincaid and W. Cheney. *Análisis Numérico : las matemáticas del cálculo científico*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.

[Mar87] M. J. Maron. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Macmillan Publishing Co., New York, second edition, 1987.

[ML91] M. J. Maron and R. J. Lopez. *Numerical Analysis: A Practical Approach*. Wadsworth, Belmont, California, third edition, 1991.

[RR78] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz. *A First Course in Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 2nd. edition, 1978.

[Sch89] H.R. Schwarz. *Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[Wer84] W. Werner. *Mathematics of Computation*, 43:205–217, 1984.

[YG73a] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume I. Dover Publications, New York, 1973.

[YG73b] David M. Young and R.T. Gregory. *A Survey of Numerical Mathematics*, volume II. Dover Publications, New York, 1973.

Soluciones a los Problemas

Problema 1. Los valores son $f(0.158) = 0.78801042$ y $f(0.636) = 0.65178537$.

Problema 2. Se obtienen los mismos resultados:
$f(0.158) = 0.78801042$ y $f(0.636) = 0.65178537$. El polinomio resultante es:

$$0.114346666667x^3 - 0.44704x^2 + 0.00841333333334x + 0.79739$$

en el primer caso y

$$0.170666666667x^3 - 0.51936x^2 + 0.0391333333333x + 0.79307$$

en el segundo caso.

Problema 3.

El polinomio en ambos casos es:

$$-0.19936x^2 - 0.1582x + 0.83307$$

Problema 4(a)

$$\begin{aligned}\Delta[f(x).g(x)] &= f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x) = \\ &= f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x) + f(x).g(x+h) - f(x).g(x+h) = \\ &= f(x).g(x+h) - f(x).g(x) + g(x+h).f(x+h) - g(x+h).f(x) = \\ &= f(x).\Delta g(x) + g(x+h).\Delta f(x)\end{aligned}$$

□

Problema 4(b) Por inducción.

$\square$

Problema 4(c) Es sencillo. Se deja como ejercicio.

$\square$